91-02049/

Environment Canada | Environnement Canada
Conservation and Protection | Conservation et Protection

On the Dynamics of Phosphorus in Lake Systems

Bernard C. Kenney

NHRI PAPER NO. 45

IWD SCIENTIFIC SERIES NO. 182

INLAND WATERS DIRECTORATE
NATIONAL HYDROLOGY RESEARCH INSTITUTE
NATIONAL HYDROLOGY RESEARCH CENTRE
SASKATOON, SASKATCHEWAN, 1990

(Disponible en français sur demande)

Canada

Printed on paper that contains recovered waste

Published by authority of
the Minister of the Environment

© Minister of Supply and Services Canada 1990

Cat. No. En 36-502/182E

ISBN 0-662-18283-9

Contents

	Page
ABSTRACT	v
RÉSUMÉ	v
MANAGEMENT PERSPECTIVE	vi
INTRODUCTION	1
INPUT-OUTPUT MODELS	1
A well-mixed model with a single time scale	2
A model with two time scales	4
THE PHOSPHORUS LOADING MODELS	6
The hydraulic loading model	6
The advanced model	7
THE STEADY STATE ASSUMPTION	10
THE EDMONDSON AND LEHMAN MODEL	12
LAKE PHOSPHORUS DYNAMICS	16
The sedimentation constant, σ	16
The steady state method	16
The step function response method	17
The forced response method	17
Time-dependent coefficients	19
ACKNOWLEDGMENTS	20
REFERENCES	20

Table

1. Some typical values of the effective time scale, the water renewal time, and the special sedimentation time scale according to the advanced model 9

Illustrations

		Page
Figure 1.	Time response of input-output model with a single scale: water renewal time	4
Figure 2.	Time response of input-output model with two time scales: water renewal and sedimentation	5
Figure 3.	Relative phosphorus residence time as a function of water residence time	7
Figure 4.	Nondimensional lake phosphorus plotted against water residence time for 54 lakes	12
Figure 5.	Annual flux of phosphorus to the sediments as calculated from the phosphorus budget of Lake Washington versus phosphorus input	14
Figure 6.	Predicted phosphorus outflow from the Edmondson and Lehman model versus the measured outflow	14
Figure 7.	Lake phosphorus predicted by the Edmondson and Lehman model versus the measured lake phosphorus	15

Abstract

The application of first-order linear dynamics to predict eutrophication in lakes is reviewed within the framework of the phosphorus loading concept. Lack of understanding of the sedimentation term and use of the steady state assumption have impeded predictions in the past.

A model of the dynamics of total phosphorus in lakes is derived which shows that lakes respond as a forced system to changes in inflow phosphorus concentration. Although the concentration of phosphorus in a lake is shown to scale with the inflow concentration, the time dependence of flushing and sedimentation is important to successful modelling.

Résumé

L'application d'une dynamique linéaire du premier ordre servant à la prévision de l'eutrophisation des lacs est étudiée en fonction de la charge en phosphore. Une mauvaise compréhension du terme de la sédimentation et l'utilisation de l'hypothèse du régime permanent ont gêné les prévisions par le passé.

Un modèle de la dynamique du phosphore total d'un lac est établi. Ce modèle montre que les lacs réagissent comme un système forcé aux variations de la concentration en phosphore du débit entrant. Bien que la concentration en phosphore d'un lac corresponde à celle du débit entrant, il est montré qu'il importe de cerner les caractéristiques de la vidange et de la sédimentation afin de bien modéliser la dynamique.

Management Perspective

Many lakes in Canada experience large blooms of algae during the summer months that degrade water quality and limit potential uses. The algae thrive on high concentrations of phosphorus that often originate from municipal sewage effluents. Some understanding of how phosphorus behaves in lakes is necessary in order to evaluate the potential impact of improvements in sewage treatment.

In this report, the theory of phosphorus dynamics is derived for lakes controlled by flushing and sedimentation. The phosphorus loading concept is then reviewed. It is shown that the use of static models and a lack of understanding of phosphorus sedimentation have impeded the prediction of lake phosphorus.

On the Dynamics of Phosphorus in Lake Systems

Bernard C. Kenney

INTRODUCTION

In several classic papers, Vollenweider (1968, 1975, 1976) presented methods to predict lake eutrophication using the phosphorus loading concept. This concept was based upon an empirical observation that chlorophyll production increases with the supply of phosphorus (or loading) to lakes. The phosphorus loading concept was quantified in the form of nomographs called phosphorus loading diagrams, which have been used to predict changes in the trophic state of lakes from changes in loading. In general, the concept is called the nutrient loading concept and can be applied to any plant nutrient or fertilizer in addition to phosphorus.

In the present paper, the phosphorus loading concept is examined within the framework of equilibrium input-output models. Some theoretical and practical shortcomings of several phosphorus models are then discussed. Finally, the dynamics of total phosphorus in lakes is explored using first-order linear theory with time-dependent coefficients.

INPUT-OUTPUT MODELS

Sawyer (1947) reported that when the phosphorus concentration in a lake was greater than 10 to 20 mg/m^3, algal blooms frequently occurred. The lower limit of Sawyer's observation was used by Vollenweider (1975, 1976) as the criterion to quantify eutrophication. The problem of predicting the trophic state of a lake is then reduced to one of predicting when the concentration of phosphorus in a lake, P_L, exceeds 10 mg/m^3 from estimates of phosphorus input or loading, L, to the lake. The phosphorus loading is defined as the mass of total phosphorus entering a lake per unit time divided by the surface area of the lake. The required result may be expressed mathematically as a relationship between P_L and L (plus other as yet unspecified variables). The relationship may be expressed in terms of an unknown function, f, as

$$f(P_L, L, , , ,) = 0. \qquad (1)$$

The usual empirical approach applied to such problems is to measure P_L and L for a number of cases and determine the unknown function, f. The empirical approach is basically a curve-fitting exercise, and the resultant curve (the unknown function, f) is often assumed to be universal. Once f is known, one may determine (or "predict") P_L from estimates of L for other lakes. Conversely, a critical loading can be established for a lake by setting P_L to 10 mg/m^3 in equation (1). How well this model predicts the unknown case is strongly dependent upon the validity of the assumption of similarity among lakes.

In engineering applications, the empirical approach produces good results when the data used in determining the unknown function are judiciously chosen to encompass the complete range of situations for which the resultant curve

may be used. In the context of lake eutrophication, use of the empirical approach requires that data from a wide spectrum of lakes be included when determining f. It is also implicitly assumed that other factors such as geological and geochemical differences between lake basins are unimportant.

In order to include important parameters such as the flushing rate of a lake, Vollenweider (1975) proposed that more sophisticated phosphorus loading models be tied to the principle of conservation of mass. To this end, he derived several input-output models. Because the understanding of input-output models is important to the discussion of the phosphorus loading concept to follow, a simple derivation of these models is presented in this paper.

Two input-output models are considered. The first has a single inlet and a single outlet from a well-mixed lake. Removal of phosphorus from the lake is achieved solely through the outlet. The second model is the same as the first, but with the addition of a second term for the removal of phosphorus in the form of sedimentation. This second model is equivalent to the nonconservative model presented by Vollenweider (1975, p. 58).

A Well-Mixed Model with a Single Time Scale

Consider a well-mixed "model lake" with a single inflow and a single outflow. Let Q be the volume flow of water into the lake and assume the lake level is constant with a mean depth, z. The surface area of the lake is A and the lake concentration of total phosphorus is P_L. The concentration of phosphorus in the inflowing water is P_i and in the outflowing water is P_L (because the lake is assumed well mixed). The usual fundamental variables in the problem are, therefore, P_i, P_L, Q, A, z, and t, where t is time.

Phosphorus loading, L, was used by Vollenweider (1975) as a fundamental quantity in his derivation of input-output models. Phosphorus loading, however, is actually a derived quantity or parameter. When all the phosphorus enters the lake with the inflowing water, $L = P_i Q/A$. The above fundamental variables are used in the present section to simplify the derivation of the models. To facilitate comparison with Vollenweider (1975), certain equations are also expressed in terms of phosphorus loading.

The problem is to determine P_L at any time t after the continuous introduction of phosphorus at the inflow, P_i, beginning suddenly at time $t = 0$. The assumption can be made, without loss of generality, that the initial lake concentration was zero at time $t = 0$. If the problem were to be approached from experimental point of view, the first task would be to perform a dimensional analysis of the independent variables (Taylor, 1974). The pertinent dimensions in this problem are mass $\underline{M}$, length $\underline{L}$, and time $\underline{T}$. Taylor's convention will be used to list the dimensions of the fundamental variables. For [ ] read "the dimensions of." For = read "are."

$$
\begin{aligned}
[P_i] &= \underline{M}\underline{L}^{-3} \\
[P_L] &= \underline{M}\underline{L}^{-3} \\
[Q] &= \underline{L}^3\underline{T}^{-1} \\
[A] &= \underline{L}^2 \\
[z] &= \underline{L} \\
[t] &= \underline{T}
\end{aligned}
$$

For this simple problem, two dimensionless groups may be found, either by inspection or by using the Buchingham Π theorem (Taylor, 1974). The result of the dimensional analysis is

$$\frac{P_L}{P_i} = \text{Func}\left(\frac{Qt}{Az}\right). \qquad (2)$$

Equation (2) says that the dimensionless concentration P_L/P_i is some unknown

function of the dimensionless variable Qt/Az. The actual functional relationship depends upon equations governing the process. Using the empirical approach, the unknown function would be determined by the experiment--by correlating P_L/P_i against Qt/Az, for example.

In this case, it is not necessary to conduct a series of experiments to determine the unknown function. The governing equation for the model lake can be written down directly using the principle of conservation of mass as

$$\frac{dP_L}{dt} = \frac{P_i Q}{Az} - \frac{P_L Q}{Az}. \qquad (3)$$

In this differential equation, dP_L/dt is the rate of change of concentration of phosphorus in the lake expressed as the difference between the rate at which the concentration is increasing in the lake due to the inflow and the rate at which the concentration is decreasing because of losses at the outflow. Because the assumption was made that phosphorus enters the lake only with the inflowing water, equation (3) may also be written in terms of the phosphorus loading as

$$\frac{dP_L}{dt} = \frac{L}{z} - \frac{P_L Q}{Az}. \qquad (4)$$

Equation (4) is equivalent to equation (2.5) in Vollenweider (1975).

Equation (3) is a first-order ordinary differential equation that can be readily solved by separation of variables. The solution, subject to the initial conditions, $P_L = 0$ at $t = 0$, is

$$\frac{P_L}{P_i} = 1 - \exp(-Qt/Az). \qquad (5)$$

Thus, the unknown function in equation (2) has been found for this simple model lake. If the governing equation were different because of a different set of initial assumptions (say, about mixing), then this unknown function would also be different. This solution to equation (3) is called the step function response of the lake with respect to phosphorus. It describes the increase in lake concentration of phosphorus with time after the sudden start of phosphorus addition at the inflow. Using similar techniques, a sudden decrease or even continuous changes in the inflow phosphorus concentration can also be calculated.

The step function response is shown in Figure 1 in terms of the time scale $\tau_w = Az/Q$ of the system. By definition, when $t = \tau_w$, then $P_L = -1/e = 63\%$ of its final value. The time scale, Az/Q, in this simple problem is the same as that often used for real lakes. It is known as the water residence time or water renewal time.

Two characteristics of Figure 1 are important for discussions to be presented later in this paper. First, at steady state (i.e., as $t \to \infty$), the lake concentration is equal to the inflow concentration for this model (i.e., $P_L = P_i$). Second, a reasonable estimate of the final steady state value (say 99%) requires a time of $t > 5\tau_w$. For all values of $t < 5\tau_w$, $P_L < P_i$.

The analysis that leads to equation (5) is exact. If a physical model of the model lake were constructed in a laboratory such that all the initial assumptions were met, then equation (5) could also be determined experimentally. How well equation (5) applies to a real lake is solely dependent upon how well the model assumptions apply to the real lake. The validity of the assumptions to real lakes will be discussed later.

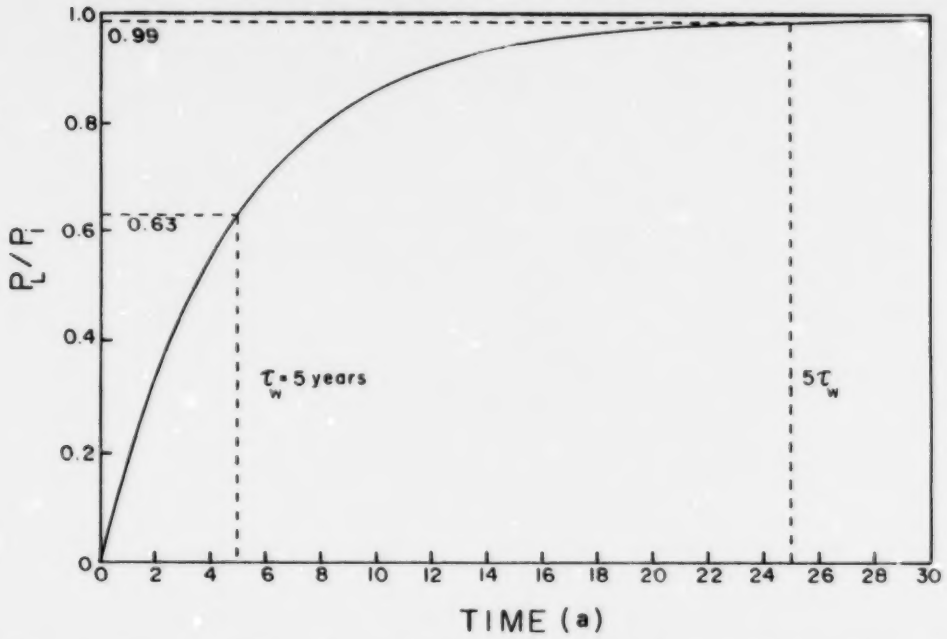

Figure 1. Time response of input-output model with a single scale: water renewal time.

A Model with Two Time Scales

As an extension of the previous model, consider that the element being introduced into the lake (phosphorus) may be removed from the lake by some other means than outflow, i.e., sedimentation. The assumption is made that the rate of removal by sedimentation is proportional to the concentration of phosphorus in the lake, P_L, and the proportionality constant will be called σ. The fundamental variables are now P_i, P_L, Q, A, z, and σ where $[\sigma] = \underline{T}^{-1}$. The result of a dimensional analysis for this new model is

$$\frac{P_L}{P_i} = \text{Func}\left(\frac{Qt}{Az}, \sigma t\right). \qquad (6)$$

In this case, the nondimensional lake concentration is an unknown function of two independent nondimensional variables. If the unknown function were to be determined by experiment, the task would be more formidable, particularly if the unknown function were nonlinear.

In this example, however, the governing equation may be written down directly, as before, with the addition of another term for the sedimentation process, as

$$\frac{dP_L}{dt} = \underset{\text{(source)}}{\frac{P_i Q}{Az}} - \underset{\text{(sink)}}{\frac{Q\,P_L}{Az}} - \underset{\text{(sink)}}{\sigma P_L}. \qquad (7)$$

The equation governing the new model lake now has one source term and two sink terms. This equation may also be solved by separation of variables. The solution, again subject to the initial conditions $P_L = 0$ at $t = 0$, is

$$\frac{P_L}{P_i} = \frac{1}{1 + \frac{Az\sigma}{Q}}\left[1 - \exp(-Qt/Az)\exp(-\sigma t)\right]. \qquad (8)$$

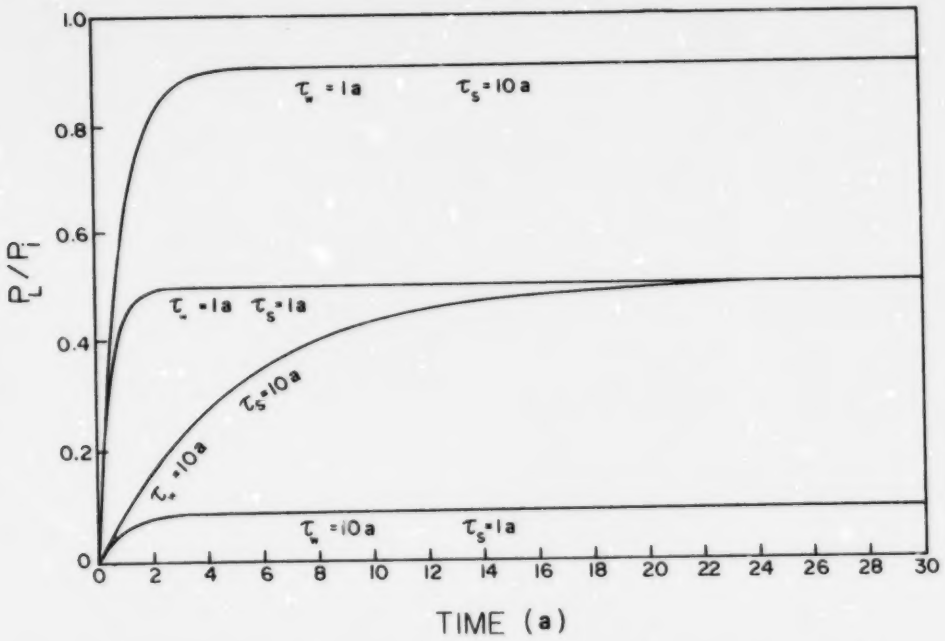

Figure 2. Time response of input-output model with two time scales: water renewal and sedimentation.

Once again the unknown function, Func (Qt/Az, σ t), has been found. It is seen that there are two time scales in this problem. The water renewal time, $\tau_w = Az/Q$, as before, and a second time scale, $\tau_s = 1/\sigma$, which will be called the sedimentation time scale.

The form of the solution is shown in Figure 2. In the steady state,

$$\frac{P_L}{P_i} = \frac{1}{1 + \frac{Az\sigma}{Q}} = \frac{1}{1 + \frac{\tau_w}{\tau_s}} \cdot (t \to \infty) \qquad (9)$$

The steady state value of the lake concentration is no longer simply equal to the inflow concentration, but $P_L < Pi$ always. The actual steady state value of P_L is dependent not only upon the sedimentation time scale, but also on the water renewal time. Therefore, two vastly different lakes--one with a high flushing rate and a high sedimentation rate and the second with low flushing and low sedimentation--can have the same steady state value of lake concentration (Fig. 2). However, the time required to reach steady state is much longer in the latter case. In general, the higher the flushing rate (i.e., the smaller τ_w) for a given sedimentation rate, the closer the steady state value of P_L will be to P_i. Conversely, the higher the sedimentation (i.e., the smaller τ_s) for a given flushing rate, the smaller the final value of P_L.

Because of the form of the solution for this model, an overall time constant, τ_o, can also be defined by

$$\tau_o = \frac{\tau_w}{1 + \frac{\tau_w}{\tau_s}}. \qquad (10)$$

The overall time scale of a system is always less than the water renewal time for any finite value of sedimentation. As before, 99% of the steady-state value is reached in $5\tau_o$.

THE PHOSPHORUS LOADING MODELS

The Hydraulic Loading Model

The hydraulic loading model presented in Vollenweider (1976) was based on the input-output model with one source (inflow) and two sinks (outflow and sedimentation) described in the previous section. The results of the model were presented as a plot of phosphorus loading versus hydraulic loading, where hydraulic loading was defined as the mean depth divided by the water renewal time of a lake. The derivation of the hydraulic loading model, however, contained an error in the treatment of the sedimentation term. The nature and consequences of this error are discussed in the present section.

The requisite input-output model was expressed in equation (7) using the fundamental variables of the problem. Equation (7) can be rewritten then in terms of the phosphorus loading as

$$\frac{dP_L}{dt} = \frac{L}{z} - \frac{P_L}{\tau_w} - \sigma P_L. \qquad (11)$$

The solution to equation (11) is the required result, that is, a relationship between L and P_L. It is unnecessary to integrate equation (11) to obtain the solution, however, because the assumption was made in Vollenweider (1976) that all lakes are in steady state with respect to phosphorus. Therefore, setting $dP_L/dt = 0$ in equation (11) produces the required result of the hydraulic loading model,

$$L = P_L \left(\frac{z}{\tau_w} + z\sigma\right). \qquad (12)$$

When z, τ_w, and σ are known, equation (12) describes the relationship between L and P_L (at least within the assumptions made in deriving the model).

The application of equation (12) to real lakes is hampered by the fact that the sedimentation time scale, σ^{-1}, is neither generally known nor readily measured. In Vollenweider (1975), it was stated that σ could not be measured, but must be determined from the model itself. This was done by rewriting equation (12) in the form

$$\sigma = \frac{1}{z}\left(\frac{L}{P_L} - \frac{z}{\tau_w}\right). \qquad (13)$$

Data for P_L, L, z, and τ_w were then used to determine σ for 21 different lakes. Although the sedimentation constant can be determined for individual lakes that are in steady state using this method, equation (13) is not an independent equation. If equation (13) is substituted back into equation (12), an identity results. That is,

$$L = P_L\left(\frac{z}{\tau_w} + z\sigma\right)$$

$$= P_L\left[\frac{z}{\tau_w} + \frac{z}{z}\left(\frac{L}{P_L} - \frac{z}{\tau_w}\right)\right] = L. \qquad (14)$$

This identity (14) means that equation (13) cannot be used as a functional relationship for σ in equation (12). A general relationship for σ that is valid for all lakes must be derived independently of either equation (12) or equation (13).

In Vollenweider (1976), the estimates of σ for the 21 lakes were plotted against the mean depth in an attempt to obtain an independent equation for σ. In this case, mean depth was an unfortunate choice of parameters because the correlation that was found between σ and z was a spurious self-correlation that resulted from plotting a ratio against

its own denominator. This ratio correlation was examined by Kenney (1982) as part of an analysis of the forms of spurious self-correlation that result from the use of a common term. The result of the correlation was

$$\sigma = \frac{10}{z}. \qquad (15)$$

Therefore, instead of applying equation (13) directly to equation (12), which would have resulted in the identity (14), the spurious relation described by equation (15) was substituted into equation (12) to obtain the final result of the hydraulic loading model, that is,

$$L = P_L \left(\frac{z}{\tau_w} + 10\right). \qquad (16)$$

When the Sawyer criterion was substituted, the critical phosphorus loading, L_c, was found for a lake:

$$L_c = 10 \frac{z}{\tau_w} + 100. \ (mg/m^2/a) \qquad (17)$$

Alternatively, it may be shown that the hydraulic loading model may be obtained directly from the spurious correlation and equation (13):

$$\sigma = \frac{10}{z} = \frac{1}{z} \left(\frac{L}{P_L} - \frac{z}{\tau_w}\right). \qquad (18)$$

Equation (18) shows that the acceptance of the spurious correlation is equivalent to assuming

$$10 = \frac{L}{P_L} - \frac{z}{\tau_w}. \qquad (19)$$

Equation (19) is <u>not</u> a good approximation for the data, however, because $(L/P_L - z/\tau_w)$ varies from 3 to 60 (with a mean of 15 and a standard deviation of 14). Nevertheless, equation (16) may be obtained directly from equation (19) alone by simply rearranging the terms.

The Advanced Model

The next phosphorus loading model to be considered was also derived in Vollenweider (1976), and it contains both mean depth and the water renewal time as parameters. It is referred to as the advanced model in the present paper.

The advanced model result relating L and P_L is

$$L = P_L \frac{z}{\tau_w} \left(1 + \sqrt{\tau_w}\right). \qquad (20)$$

Again the final result may be expressed as a critical phosphorus loading that is not to be exceeded by substitution of Sawyer's (1947) criterion that $P_L \leq 10$ mg/m^3.

In the derivation presented in Vollenweider (1976), the advanced model results from the application of the steady state assumption to equation (11). It is not necessary, however, to invoke equation (11) in order to derive the advanced model. The advanced model may be derived directly from the regression between τ_p/τ_w and τ_w, where τ_p is the residence time for phosphorus in the lake (Fig. 3).

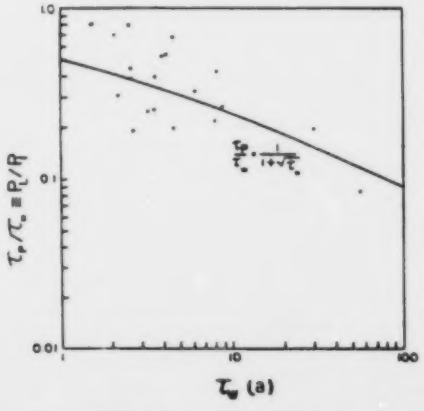

Figure 3. Relative phosphorus residence time as a function of water residence time (after Vollenweider, 1976).

Rather than use the actual power law regression equation for the data in Figure 3, Vollenweider used the following analytical representation instead:

$$\frac{\tau_p}{\tau_w} = \frac{1}{1 + \sqrt{\tau_w}}. \qquad (21)$$

Equation (21) was chosen over the power law equation because it more closely represented the expected asymptotic behaviour of highly flushed lakes (lakes with short water-renewal times). Although equation (21) represents the 21 data points in Figure 3 almost as well as the power law equation, it must be noted that the success of the regression (i.e., the high correlation coefficients obtained) is strongly dependent upon the two data points with large water-renewal times. The validity of equation (21) is discussed later, but first, the advanced model result is derived directly from equation (21).

The phosphorus residence time, τ_p, is defined by Vollenweider (1976) in analogy to the water residence time as "the hypothetical time necessary to bring the phosphorus concentration of a lake to its present level starting from concentration equal to 0." The residence time of phosphorus relative to that of water, τ_p/τ_w, was shown in Vollenweider (1976, p. 62, equation [6]) to equal the ratio of the average lake concentration of phosphorous, P_L, and the average inflow concentration, P_i. Therefore, equation (21) may be rewritten as

$$\frac{\tau_p}{\tau_w} = \frac{P_L}{P_i} = \frac{1}{1 + \sqrt{\tau_w}}. \qquad (22)$$

The assumption that the entire phosphorus loading to each lake was contained in the inflowing water was implicit in Vollenweider (1976). Using this assumption, one may write equation (22) as

$$\frac{P_L}{L}\frac{Q}{A} = \frac{1}{1 + \sqrt{\tau_w}}. \qquad (23)$$

After rearranging the terms in equation (23),

$$L = P_L \frac{Q}{A}\,\frac{z}{z}\,(1 + \sqrt{\tau_w}), \qquad (24)$$

and recalling that $\tau_w = Az/Q$, one arrives at the advanced model equation. Thus, the advanced model follows directly from an empirical regression analysis.

It is instructive, however, to further examine equation (11) to see how it is related to the advanced model. By comparing equation (22) to equation (9), one can see that the advanced model result can be derived from the input-output model with two time scales if the assumption is made that $\sigma = 1/\sqrt{r_w}$. When this assumption is made, however, a very different input-output model results. The differential equation governing phosphorus for the advanced model lake is not equation (7) or equation (11), but rather,

$$\frac{dP_L}{dt} = \underbrace{\frac{L}{z}}_{\text{(source)}} - \underbrace{\frac{P_L}{\tau_w}}_{\text{(sink)}} - \underbrace{\frac{P_L}{\sqrt{\tau_w}}}_{\text{(sink)}}. \qquad (25)$$

Note that, although equation (25) contains one source term and two sink terms, the two sink terms are not independent. Rather than a model based on two independent time scales (τ_w, σ^{-1}), the differential equation governing phosphorus for the advanced model

depends solely on the water renewal time, τ_w, Rewriting equation (25) as

$$\frac{dP_L}{dt} = \frac{L}{z} - P_L \left(\frac{1 + \sqrt{\tau_w}}{\tau_w}\right) \qquad (26)$$

and substituting equation (21) produces the simplification

$$\frac{dP_L}{dt} = \frac{L}{z} - \frac{P_L}{\tau_p}. \qquad (27)$$

The solution of equation (27) (by separation of variables) shows that the phosphorus residence time, τ_p, is the effective time scale of the advanced model. There is an important difference between the effective time scale of the advanced model described here and the overall time scale (equation [10]) discussed previously. The overall time scale contains two independent variables that describe two independent processes --flushing and sedimentation; the effective time scale describes only one process--flushing.

When the input-output models were first derived, the assumption was made that flushing and sedimentation were independent processes. This assumption appears to be reasonable for most lakes. Flushing is controlled by hydrological parameters such as precipitation, size of drainage basin, lake size, and morphometry. From a physical perspective, sedimentation is a nonstationary, random process that is largely controlled by lake turbulence and, therefore, ultimately by the wind. From a biological perspective, sedimentation is controlled by the rate at which biological processes convert dissolved phosphorus into particulate form through the growth of algae. In addition to being a nonstationary, random process, algal growth is highly nonlinear and directly coupled to many physical processes occurring in lakes. Sedimentation is likely to be quantitatively different in shallow lakes and lakes that are deep enough to stratify because the sediment flux through the thermocline is trapped, at least until fall overturn. Significant coupling between flushing and sedimentation rates is to be expected only when the hydraulic flow through the lake dominates lake turbulence generation (i.e., for lakes that are only slight widenings of rivers with high flows). Although such lakes do exist, they are not common. Therefore, the assumption that flushing and sedimentation are independent processes appears to be reasonable for most lakes.

From an alternative viewpoint, the advanced model lake may be seen as one with a special type of sedimentation, that is, sedimentation with a time scale proportional to the square root of the water renewal time. Table 1 compares typical values of the effective time scale of the advanced model lake with the water renewal time, and this special sedimentation time scale. According to Table 1, the phosphorus in lakes with long water-renewal times is dominated by sedimentation. For lakes with short water-renewal times, the effects of

Table 1. Some typical values of the effective time scale, τ_p, the water renewal time, τ_w, and the special sedimentation time scale, τ_s, according to the advanced model.

τ_p (years)	τ_w (years)	τ_s (years)
0.5	1	1.0
0.83	2	1.4
1.25	4	2.0
2.4	10	3.16
9.1	100	10.0
25.5	700	26.5
30.7	1000	31.6

flushing and sedimentation are similar in magnitude. Thus, for a lake with a long water-renewal time, such as Lake Tahoe (τ_w = 700 a), the effective time scale of the advanced model lake with respect to phosphorus is much shorter (25 a) than τ_w. As was shown earlier, it takes 5τ to approach a steady state condition. Therefore, Lake Tahoe would reach steady state with respect to phosphorus after 150 years according to the advanced model rather than 3500 years if there were no sedimentation. With such a large difference in time scales, it is very important for lake management to know which time scale is correct. The validity of the advanced model and some important consequences of the steady state assumption are discussed in the next section.

THE STEADY STATE ASSUMPTION

All of the phosphorus loading models described in Vollenweider (1976) make use of the assumption that lakes are in steady state with respect to phosphorus. Unfortunately, substantial error may be introduced by ignoring the time-dependent term in the differential equations. An assessment of the impact of the steady state assumption on the advanced model is made in this section.

It was shown previously that the advanced model is actually based on the regression between P_L/P_i and τ_w (Fig. 3). Here, the steady state assumption is crucial to the success of the model. Figures 1 and 2 show the time-dependent behaviour of P_L/P_i for two input-output models prior to steady state. For the input-output model with a single time scale (Fig. 1), the steady state lake phosphorus concentration was always equal to the inflow phosphorus concentration. For practical purposes, steady state is achieved after a time equal to $5\tau_w$. The important point here is that $P_L < P_i$ for all time less than $5\tau_w$. Furthermore, P_L may be very much less than P_i, as illustrated in Figure 1.

It is further shown in Figure 2 that (even at steady state) P_L is always less than P_i for an input-output model with two time scales (flushing and sedimentation). Prior to reaching a steady state condition, P_L may be very much less than P_i for all practical cases. The question is, how much less? And, why is it less? Is P_L less than P_i because of high sedimentation in a particular lake or is that lake simply far from its steady state value? The answers to these questions have a profound effect on the validity of the advanced model.

If all the lakes used in the regression (Fig. 3) were actually at steady state with respect to phosphorus, then $\sigma = 1/\sqrt{\tau_w}$ might be a reasonable estimate of the effect of sedimentation of phosphorus (or any other removal process for phosphorus not dealt with explicitly). However, if P_L/P_i is smaller than its steady state value for any of the lakes in Figure 3, then the effect of this too small value is simply absorbed in the sedimentation term. In other words, if P_L/P_i is small because the lake is far from steady state, the advanced model automatically assigns this lake a high sedimentation--because high sedimentation (small τ_w) is required for small P_L/P_i at steady state (see Fig. 2). Such a trend is visible in Table 1. Lakes with long water-renewal times (those lakes least likely to be at steady state) are dominated by sedimentation--according to the advanced model. But, is the advanced model correct? To properly assess the impact of the steady state assumption on the advanced model, one must return to the origin of the model (Fig. 3). As was noted previously, the success of the regression is very dependent upon the two data points in Figure 3 with large τ_w (i.e.,

τ_w = 30 years and τ_w = 56 years). When these two points are removed, the correlation coefficient changes from one that is significant at the 1% level (-0.674) to one that is not significant at the 5% level (-0.412). In other words, when these two data points are removed, there is no significant correlation between P_L/P_i and τ_w (at the 5% level) and the basis for the advanced model disappears. The validity of the advanced model is, therefore, strongly dependent upon data from two lakes--both of which have large water-reneval times. In addition, these two lakes are the least likely to be in equilibrium because they require 150 and 280 years respectively to reach steady state (ignoring sedimentation). The heavy weight given to sedimentation for lakes with long water-reneval times may be a direct result of using two lakes that are far from equilibrium as the basis for the advanced model. The accuracy of any predictions made with the advanced model must be suspect until such time as the impact of sedimentation processes is fully assessed.

Another potential concern is that the advanced model may be verified by using data from other lakes equally far from equilibrium. Since the large cultural input of phosphorus to lakes is of relatively recent origin, most lakes with long water-reneval times are included in this category. For now, the advanced model may appear to be valid. Overestimation of phosphorus sedimentation by the advanced model, however, together with concomitant lake management (i.e., increasing the phosphorus load), could have serious effects for lakes with τ_w as steady state is eventually reached.

Larsen and Mercier (1976) presented a similar analysis to Vollenweider (1976) using data from a different series of lakes. The basic input-output model and the use of the steady state assumption were identical, but the analysis was formulated in terms of the retention coefficient, $R = 1 - P_L/P_i$. The Larsen and Mercier result,

$$R = \frac{1}{1 + \tau_w^{-\frac{1}{2}}}, \qquad (28)$$

is equivalent to Vollenweider (1976) equation (22), which may be readily shown by substitution of the definitions of R into equation (28). Figure 4 shows the data from the 20 lakes used by Larsen and Mercier to obtain equation (28) plotted as P_L/P_i versus τ_w. These lakes fit equation (22) quite well and might be used as additional evidence in support of the advanced model. Unfortunately, the same criticism (i.e., the blanket application of the steady state assumption of all lakes) applies equally well to Larsen and Mercier's analysis. Furthermore, Larsen and Mercier selected the 20 lakes (out of a possible 36 lakes for which data were presented) that gave the best empirical relationship between R and lake characteristics. The process of subjectively selecting the lakes that produced the largest regression coefficient is questionable. When all the lakes from Larsen and Mercier (1976) and Vollenweider (1976) are plotted (Fig. 4), more scatter is evident. This scatter may be attributed to differences in sedimentation, the degree of unsteadiness of the various lakes, or to other factors not included in the model. Certainly, the three lakes in Figure 4 with the longest water reneval times do have the smallest values of P_L/P_i--but is this because of high sedimentation or simply because these lakes are far from steady state?

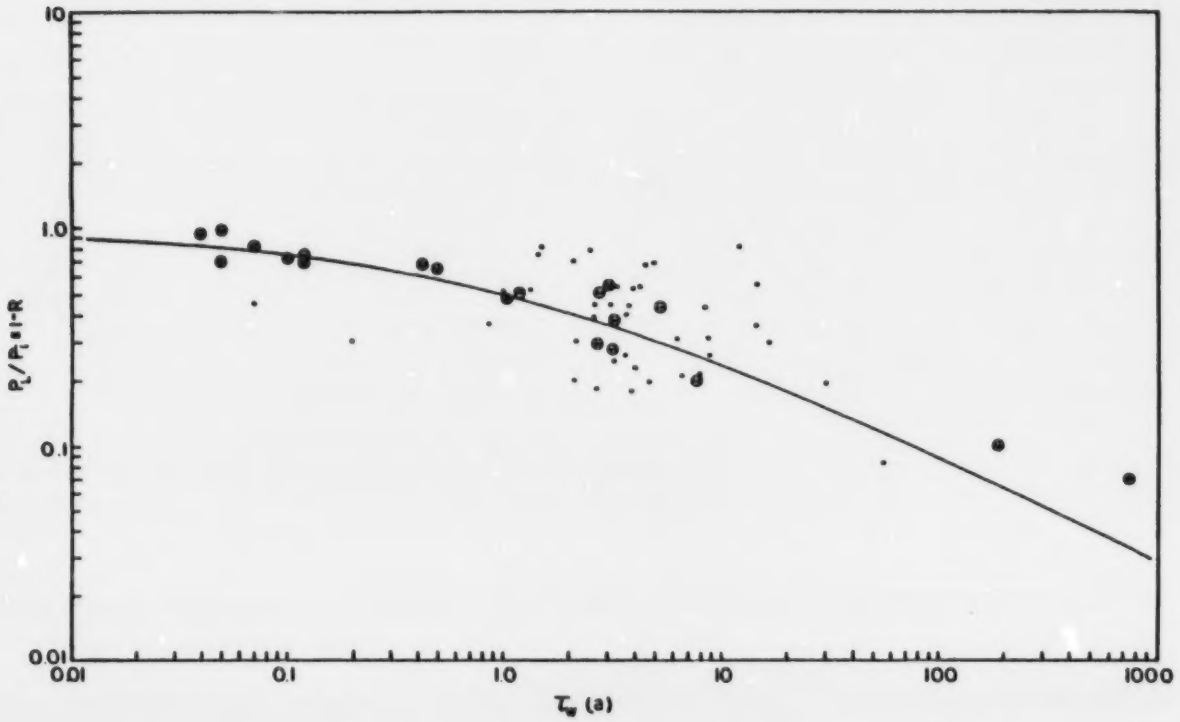

Figure 4. Nondimensional lake phosphorus, P_L/P_i, plotted against water residence time, τ_w, for 54 lakes from Larsen and Mercier (1976) and Vollenweider (1976). The 20 lakes used by Larsen and Mercier are circled.

Equations (22) and (28) and Figures 3 and 4 all assume either implicitly or explicitly that P_L/P_i is a function of τ_w alone. It was shown, however, in the derivation of the basic model underlying both the Vollenweider and the Larsen and Mercier analyses that P_L/P_i is a function of τ_w, σ, and t (cf. equation [6]). These conflicting requirements can be resolved if σ and/or t are constants; or if P_L/P_i is constant with variations in σ and/or t; or if σ and/or t are functions of τ_w; or some combination of the above. The conclusion of Vollenweider's advanced model is that P_L/P_i is constant with variations in t (i.e., the steady state assumption) and σ is a function of τ_w. There appears to be no compelling mathematical or physical evidence to support such a conclusion.

THE EDMONDSON AND LEHMAN MODEL

Edmondson and Lehman (1981) (hereafter referred to as EL) presented a lake eutrophication model that they verified with data from Lake Washington. The starting point of the EL model is the equation for the well-mixed model with a single time scale (equation [13] in this paper, equation [10] in EL). The EL model is of interest because it introduces a new concept in the treatment of sedimentation of lake

phosphorus. The conventional wisdom of phosphorus sedimentation is based on a heuristic equation in which phosphorus sedimentation is proportional to the concentration of phosphorus in the lake; the higher the phosphorus concentration, the greater the sedimentation. The EL paper suggests that sedimentation of lake phosphorus may be more accurately modelled by the assumption that sedimentation is proportional to phosphorus inflow, I (where $I = P_i Q$, using the symbols of the present paper). It will be shown below that the EL suggestion is incorrect.

The sedimentation of lake phosphorus was accounted for in the EL model simply by reducing the phosphorus inflow using the proportionality constant, $\underline{f}$. $\underline{f}$ was found in EL as the slop of the linear regression line between phosphorus sedimentation, P_{sed}, and I. P_{sed} was itself calculated from the other terms in the phosphorus budget by difference. That is, the phosphorus sedimentation was equal to the annual phosphorus inflow minus the annual phosphorus outflow, P_o, minus the annual change in the mass of phosphorus in the lake, dP, as measured on 1 January of successive years. In effect,

$$\underline{f} = \text{Func}\ (I, P_o, dP). \qquad (29)$$

It will be shown below, however, that the EL model equation may be written as

$$dP = \text{Func}\ (I, P_o, \underline{f}) \qquad (30)$$

or, alternatively, as

$$P_o = \text{Func}\ (I, dP, \underline{f}). \qquad (31)$$

Since there was no new information added between equations (29) and (31), the essence of the EL model is contained in $\underline{f}$ and the linear regression line shown in Figure 5. Figures 6 and 7, which are presented to verify the EL model, are only restatements of Figure 5. The scatter from the line of 100% agreement in Figures 6 and 7 is a re-expression of the scatter from the linear regression line in Figure 5. If all the data points in Figure 5 had fallen on the regression line, then the EL model "results" in Figures 6 and 7 would have shown perfect agreement. In actual fact, the EL model is a simple tautology.

To show the tautology more clearly requires a detailed examination of Figure 5. This figure is a plot of the annual flux of P to the sediments, P_{sed}, versus P-loading, I. The least squares regression line for the data in Figure 5 is

$$\langle P_{sed} \rangle = \underline{f}\ I + \text{constant}. \qquad (32)$$

If the annual phosphorus inflow to the lake is known for any year, say the jth year, then the least squares estimate of the annual sedimentation of phosphorus for the jth year, $\langle P_{sed} \rangle_j$; can be found from equation (32).

The EL model was given in discrete analog form as (EL equation [12]),

$$P_{j+1} = I_j(1 - \underline{f}) + P_j(1 - Q_j/V) \qquad (33)$$

where P_j is the phosphorus content of the lake on 1 January of successive years. However, EL compared the model prediction of annual outflow with the measured values (Fig. 6) so that the terms of the model equation must be rearranged to

$$P_j Q_j/V = I_j(1 - \underline{f}) - (P_{j+1} - P_j)$$

$$= \text{PREDICTED ANNUAL OUTFLOW}. \qquad (34)$$

Equation (34) is the EL model equation for predicting phosphorus outflow. Values of I_j, P_j, and P_{j+1} were

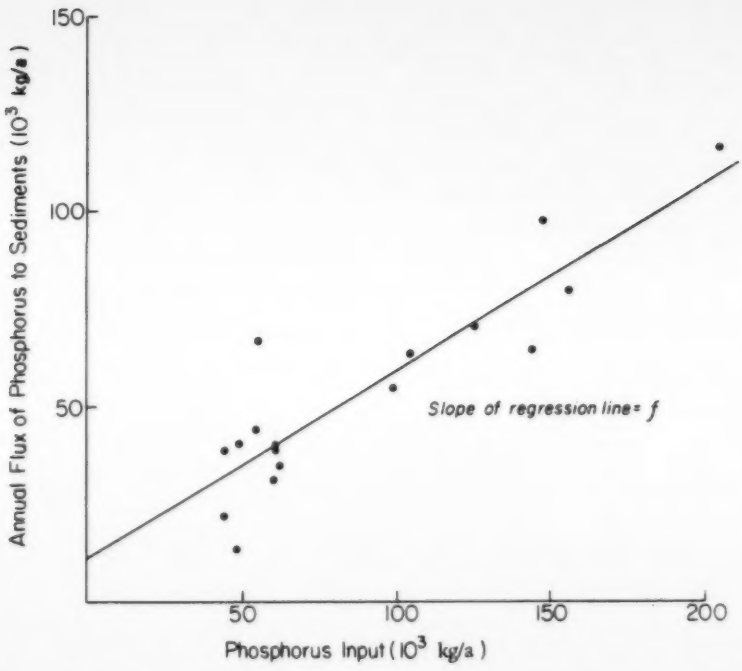

Figure 5. Annual flux of phosphorus to the sediments as calculated from the phosphorus budget of Lake Washington versus phosphorus input (after Edmondson and Lehman, 1981).

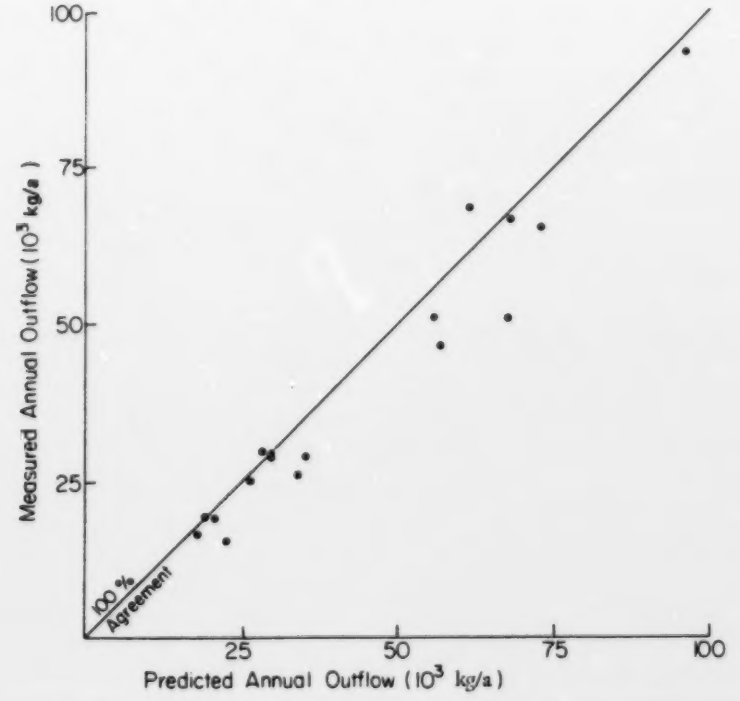

Figure 6. Predicted phosphorus outflow from the Edmondson and Lehman model versus the measured outflow (after Edmondson and Lehman, 1981).

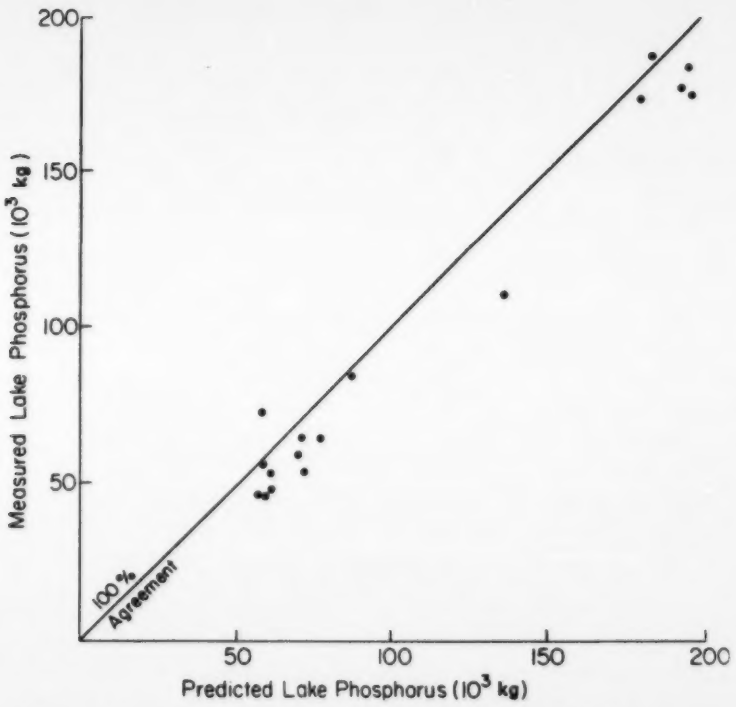

Figure 7. Lakes phosphorus predicted by the Edmondson and Lehman model versus the measured lake phosphorus (after Edmondson and Lehman, 1981).

substituted in EL to find values of the predicted annual phosphorus outflow for the jth year. The value of $\underline{f}$ was constant and equal to the 0.49 slope found in Figure 5. These predicted outflows were compared with the measured outflows in Figure 6. A similar procedure was followed for the lake P results given in Figure 7.

Equation (34) can be expanded as

$$P_j Q_j/V = I_j - \underline{f}I_j - (P_{j+1} - P_j) + P_{o_j} - P_{o_j} = I_j - P_{o_j} - dP_j - \underline{f}I_j + P_{o_j}. \quad (35)$$

But,

$$P_{sed_j} = (I - P_o - dP)_j \quad (36)$$

because P_{sed} was found by difference using the budget method. Furthermore, from equation (32), $\underline{f}I$ is the least squares estimate of P_{sed} minus a constant, that is,

$$\underline{f}I_j = \langle P_{sed} \rangle_j - \text{constant}. \quad (37)$$

Substituting equations (36) and (37) into equation (35) gives the annual phosphorus outflow predicted by the EL model as

$$P_j Q_j / V = P_{sed_j} - \langle P_{sed} \rangle_j + \text{constant} + P_{o_j} . \quad (38)$$

For those data points that fall on the regression line, P_{sed} is identically equal to $\langle P_{sed} \rangle$. For all other data points, P_{sed} is approximately equal to $\langle P_{sed} \rangle$ except for scatter about the least squares regression line. Therefore, equation (38) reduces to

$$P_j Q_j / V = P_{o_j} + \text{constant} \pm \text{scatter}. \quad (39)$$

Thus, we have returned to our starting point. The predicted outflow phosphorus is identically equal to the measured outflow phosphorus plus a constant plus or minus some scatter. The constant, which arose because of the non-zero intercept of the regression line in Figure 5, explains why most of the predicted values lie to the right of the theoretical line of 100% agreement between prediction and observation in Figure 6. As stated earlier, the scatter in Figure 6 is simply a reflection of the scatter in Figure 5.

The same arguments apply for Figure 7, where the predicted lake phosphorus generally lies to the right of line of 100% agreement with the observed lake phosphorus.

LAKE PHOSPHORUS DYNAMICS

In this section, the nature of the input-output models derived previously is further explored, and several factors affecting the application of these models to real lakes are considered. It will be assumed that phosphorus is the correct element to model and that Sawyer's criterion is also correct. The prediction of eutrophication, therefore, may be reduced to one of predicting when $P_L > 10$ mg/m^3, as before. Because one is interested in the long-term effects of phosphorus loading to a lake, it is the steady state value of P_L that one would like to predict.

The steady state result relating phosphorus loading and lake phosphorus concentration was given in equation (12) for the input-output model with two time scales, flushing and sedimentation. The critical phosphorus loading, L_c, for a specific lake may be found by substituting Sawyer's criterion in equation (12). That is,

$$L_c = 10z \left(\frac{1}{\tau_w} + \sigma\right) \text{ (mg/m}^2\text{/a)}. \quad (40)$$

Within the assumption made, equation (40) is the "predictive" equation for lake eutrophication. For lakes where z, τ_w, and σ are known, the critical phosphorus loading may be calculated directly from equation (40). Of course, σ is not generally known, and it is this deficiency that led to the problems previously described.

The Sedimentation Constant, σ

There are several indirect methods to determine σ for a specific lake depending upon the type of phosphorus loading to that lake. Each method depends critically on the validity of the input-output model with two time scales. All experimental error in the measurement of the data (as well as any error from other sources or sinks not explicitly accounted for by the model) is simply absorbed in the sedimentation constant.

The Steady State Method

The first method was discussed briefly when considering the hydraulic

loading model. It may be applied to a specific lake if that lake is known to be in steady state with respect to phosphorus. To assume that a lake is in steady state without corroborative data is futile. The existence of steady state conditions may be determined by measuring L and P_L for a period of time. If L and P_L are constant for a time equal to about τ_o or longer, then it is safe to assume that the lake is in steady state. If data are also available for z (and τ_w), then σ may be determined from equation (13).

If one is only interested in determining the critical phosphorus loading for a specific lake in steady state, it is not necessary to calculate the sedimentation constant, σ. For a specific lake in steady state, the ratio, L/P_L, is a constant. Therefore, a single measurement of L and P_L will produce the constant for that specific lake--within the requisite assumptions, of course. The critical phosphorus loading may then be found from

$$\frac{L_c}{10} = \text{CONSTANT} = \left(\frac{L}{P_L}\right)_{\substack{\text{steady} \\ \text{state}}} \qquad (41)$$

Although equation (41) applies to each lake separately, the value of the constant will vary greatly from lake to lake.

The Step Function Response Method

The second method of determining the sedimentation constant may be applied if there has been a sudden change in the phosphorus loading (either increase or decrease), and if the lake phosphorus concentrations, P_L, are measured following the change. The overall time constant of the lake, τ_o, may be determined by fitting an exponential curve to the P_L versus time data. Once τ_o is known, σ may be found from equation (10) and the critical phosphorus loading for that specific lake may again be calculated from equation (40).

The Forced Response Method

For many lakes, the phosphorus loading is neither constant nor subject to sudden changes to a new level, but rather is continuously changing. One must examine the forced response of the lake to determine σ in these cases.

In order to simplify the discussion of forced systems, an analysis of the forced response of the input-output model with a single time scale is presented first. The first-order linear equation governing the input-output model with one time scale (equation 3) may be rewritten as

$$\tau_w \frac{dP_L}{dt} + P_L = P_i(t) \qquad (42)$$

where the phosphorus concentration in the inflowing water, P_i, is now the time-dependent forcing function for the system. The simplest forcing is given by

$$P_i(t) = P_o + P_1 \sin \omega t \qquad (43)$$

where P_1 is the amplitude of a simple harmonic oscillation about some constant level of phosphorus concentration, P_o.

Equations (42) and (43) may be readily solved in terms of the relative amplitude of the output oscillations and the phase shift between the input and the output, but for brevity, the derivation of the solution is omitted. After initial transients have decayed, the output of the forced system (P_L', the oscillating part of P_L in this example) occurs at the same frequency as the forcing function (i.e., at ω). The amplitude of the output oscillations and the phase shift between the input and

the output are determined by the characteristics of the system. In equation (42) there is only one parameter that characterizes the entire system--the water renewal time, τ_w. The relative amplitude of the response, G (i.e., the magnitude of the output oscillation relative to the input oscillations or forcing), is given by

$$G = \frac{P_L'}{P_1} = \frac{1}{(1 + \omega^2\tau_w^2)^{1/2}}. \qquad (44)$$

The output oscillations lag the input by a phase shift, ϕ, given by

$$\phi = \tan^{-1} \omega\tau_w. \qquad (45)$$

The forced system response is totally described by G and ϕ as a function of nondimensional frequency $\omega\tau_w$. For low frequency forcing (i.e., small $\omega\tau_w$), the output (P_L') essentially follows the input (P_1) with little attenuation or phase shift. On the other hand, high frequency forcing ($\omega\tau_w >> 1$) is very strongly attenuated. The lake phosphorus lags the input oscillations by approximately 90 degrees at high frequency.

As an example, consider a hypothetical lake with a water renewal time of one year subjected to forcing with an annual cycle. From equations (44) and (45) the relative response is only 0.16 with a phase shift of 81 degrees. This means that oscillations in phosphorus concentration of the inflow of 100 mg/m^3, for example, would result in a 16-mg/m^3 oscillation in the phosphorus concentration in the lake. Thus annual oscillations in inflow phosphorus are high frequency oscillations for a lake with a one-year water renewal time. Faster oscillations in inflow (e.g., monthly, daily) are more highly attenuated in this hypothetical lake and require extremely large amplitude forcing even to be detectable in the outflow.

Except that the response characteristics are determined by two parameters (τ_w and σ), the forced response of the input-output model with two time scales is similar to that described above. The governing equation (equation [7]) may be rewritten to show the role of forcing as

$$\tau_w \frac{dP_L}{dt} + (1 + \sigma\tau_w)P_L = P_o + P_1 \sin \omega t. \qquad (46)$$

The solution of equation (46) for the relative amplitude is

$$G = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\omega\tau_w}{1 + \sigma\tau_w}\right)^2\right]^{1/2}}. \qquad (47)$$

The phase shift is now

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\omega\tau_w}{1 + \sigma\tau_w}\right). \qquad (48)$$

For cases where a lake is subjected to simple harmonic forcing, that is, a sinusoidal oscillation of a single frequency, either equation (47) or equation (48) can be used to determine the sedimentation constant within the range of nondimensional frequencies, $0.1 \leq \omega\tau_w/(1 + \sigma\tau_w) \leq 10$. Outside of this frequency range, the accuracy to which σ can be determined is very poor. The use of either equation to determine σ requires a measurement of the water renewal time plus a time history of inflow and lake phosphorus concentrations of sufficient length to determine ω from the measurements. To use equation (47), the relative response, G, is calculated from the time histories of the inflow and outflow leaving σ as the only unknown in equation (47). Similarly, the

phase shift, ϕ, is measured directly from the time histories thereby permitting the use of equation (48) to determine σ. Reasonable accuracy requires data over at least one complete cycle of period $T = 2\pi/\omega$.

For cases where the forcing is broadband (i.e., composed of many different frequencies), the phase shift between the input oscillations and the output may still be determined using cross-spectral analysis. However, spectral techniques require data over many complete cycles of oscillation so that sufficient data may not be available for the spectral approach if the forcing is predominantly low frequency. It must be emphasized that all the methods for the determination of σ described herein require time histories of the inflow and lake phosphorus concentrations over several τ_w. Consequently, the spectral approach to the determination of σ is likely to be applied (in the near future) only to lakes with small τ_w.

Time-Dependent Coefficients

As mentioned before, the successful application of input-output models for predicting eutrophication depends solely upon the validity of the assumptions made in the derivation of the models--the mathematics is exact. The validity of one assumption that greatly affects the application of these models is now considered.

It was assumed throughout this paper that the coefficients of the first-order differential equations (i.e., τ_w, σ) were constants. Most real lakes, however, are subjected to large variations in flow (Q) throughout the year, with peak flows usually occurring during spring runoff for many temperate lakes. Changes in lake level (z) and volume (Az) may also be large, particularly for lakes used for hydroelectric purposes. These variables directly affect the water reneval time ($\tau_w = Az/Q$), making τ_w time dependent.

The factors that affect the sedimentation constant, σ, are not as well understood. It is known that sedimentation is a nonstationary, random process that can be positive or negative at various times. A negative sedimentation flux occurs to some extent in the water column of all lakes and is very common in shallow lakes. Because physical sedimentation is controlled principally by the level of turbulence in a lake, large seasonal variations in σ are expected to reflect the differences between turbulence under winter ice and during open water in temperate lakes.

More realistic models require time-dependent coefficients, therefore, for both τ_w and σ. For example,

$$\tau_w(t)\frac{dP_L(t)}{dt} + [1 + \sigma(t)\tau_w(t)]\,P_L(t) = P_i(t) \qquad (49)$$

now replaces equation (46) where the time dependence is given explicitly by (t). Before equation (49) can be solved, the temporal variation in τ_w and σ must be known (or independently predicted) either in the form of time histories for random variations or in the form of analytical functions for periodic variations. The model forcing, $P_i(t)$, must also be input to the model. The forcing may be in the form of time histories of measured phosphorus inflow to a lake for a hindcast of the lake response. Anticipated changes in phosphorus inflow could also be input to the model either as time histories or as analytical functions in order to forecast future lake changes.

Temporal variations in the coefficients may be more important than variations in the phosphorus concentration of the inflow (forcing) for many lakes. In complicated lakes, the forcing and the time-dependent coefficients may even be coupled, say, by the flow through the lake, Q. It may be stated, in general, that a large spring runoff tends to make the spring lake phosphorus concentration equal to the spring inflow concentration by greatly reducing the instantaneous value of τ_w. Ice cover, on the other hand, tends to enhance the sedimentation sink.

A quasi-stationary approximation may allow analytical solutions to equation (49) if the variations in the coefficients are slow compared to the forcing frequency. Since seasonal variations in τ_w and σ are often predominant, the quasi-stationary approximation will seldom apply. In general, equations like equation (49) require numerical solutions.

Several examples of the application of the theory developed here to real lakes may be found in Kenney (1990a, 1990b).

ACKNOWLEDGMENTS

I thank K. Patalas, F.M. Boyce, D.W. Schindler, C. Gray, M. Waiser, and R.A. Vollenweider for comments on earlier drafts of the manuscript. J. Mollison is gratefully acknowledged for preparation of the figures.

REFERENCES

Edmondson, W.T., and J.T. Lehman. 1981. The effect of changes in the nutrient income on the condition of Lake Washington. Limnol, Oceanogr., 26: 1-29.

Kenney, B.C. 1982. Beware of spurious self-correlations! Water Resour. Res., 18: 1041-1048.

Kenney, B.C. 1990a. Dynamics of phosphorus in a chain of lakes: The Fishing Lakes. NHRI Pap. No. 44, Sci. Ser. No. 176, National Hydrology Research Institute, National Hydrology Research Centre, Inland Waters Directorate, Environment Canada, Saskatoon, Sask.

Kenney, B.C. 1990b. Lake dynamics and the effects of flooding on total phosphorus. Can. J. Fish. Aquat. Sci., 47: 480-485.

Larsen, D.P., and H.T. Mercier. 1976. Phosphorus retention capacity of lakes. J. Fish. Res. Board Can., 33: 1742-1750.

Sawyer, C.N. 1947. Fertilization of lakes by agricultural and urban drainage. J. N. Engl. Water Works Assoc., 61: 109-127.

Taylor, E.S. 1974. Dimensional analysis for engineers. London: Oxford University Press.

Vollenweider, R.A. 1968. Scientific fundamentals of the eutrophication of lakes and flowing water, with particular reference to phosphorus and nitrogen as factors in eutrophication. OECD Tech. Rep. DAS/CS1/68.27. 159 p.

Vollenweider, R.A. 1975. Input-output models with special reference to the phosphorus loading concept in limnology. Schweiz. Z. Hydrol., 37: 53-84.

Vollenweider, R.A. 1976. Advances in defining critical loading levels for phosphorus in lake eutrophication, Mem. Ist. Ital. Idrobiol., 33: 53-83.

Environnement Canada
Conservation et Protection

Environment Canada
Conservation and Protection

Dynamique du phosphore dans les systèmes lacustres

Bernard C. Kenney

RAPPORT N° 45 DE L'INRH

ÉTUDE N° 182, SÉRIE SCIENTIFIQUE DE LA DGEI

DIRECTION GÉNÉRALE DES EAUX INTÉRIEURES
INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN HYDROLOGIE
CENTRE NATIONAL DE RECHERCHE EN HYDROLOGIE
SASKATOON (SASKATCHEWAN) 1990

(Available in English on request)

Canada

Imprimé sur du papier à base de matériels récupérés

Publié avec l'autorisation
du ministre de l'Environnement

© Ministre des Approvisionnements et Services Canada 1990

Nº de cat. En 36-502/182F

ISBN 0-662-96462-4

Table des matières

	Page
RÉSUMÉ	v
ABSTRACT	v
PERSPECTIVE DE GESTION	vi
INTRODUCTION	1
MODÈLES ENTRÉE-SORTIE	1
Modèle de lac bien mélangé à une seule échelle de temps	2
Modèle à deux échelles de temps	4
MODÈLES DE LA CHARGE EN PHOSPHORE	6
Modèle de la charge hydraulique	6
Modèle perfectionné	8
HYPOTHÈSE DU RÉGIME PERMANENT	11
MODÈLE D'EDMONDSON ET LEHMAN	13
DYNAMIQUE DU PHOSPHORE DANS UN LAC	17
Constante de sédimentation, σ	18
Méthode du régime permanent	18
Méthode de la réponse à une fonction échelon	18
Méthode de la réponse forcée	19
Coefficients variables en fonction du temps	21
REMERCIEMENTS	22
RÉFÉRENCES	22

Tableau

1.	Quelques valeurs typiques de l'échelle de temps efficace, du temps de renouvellement de l'eau, et de l'échelle de temps de sédimentation spéciale, obtenues à partir du modèle perfectionné	11

Illustrations

		Page
Figure 1.	Réponse en fonction du temps du modèle entrée-sortie à une échelle de temps: temps de renouvellement de l'eau	4
Figure 2.	Réponse en fonction du temps du modèle entrée-sortie à deux échelles de temps: renouvellement de l'eau et sédimentation	6
Figure 3.	Temps de séjour relatif du phosphore en fonction du temps de séjour de l'eau	8
Figure 4.	Rapport des concentrations de phosphore non dimensionnel en fonction du temps de séjour de l'eau pour 54 lacs	14
Figure 5.	Taux annuel de sédimentation du phosphore calculé à partir du bilan de phosphore du lac Washington en fonction de l'apport de phosphore	16
Figure 6.	Taux d'évacuation du phosphore prédit à l'aide du modèle d'Edmondson et Lehman en fonction du taux d'évacuation mesuré	16
Figure 7.	Masse de phosphore dans le lac prédite par le modèle d'Edmondson et Lehman en fonction de la masse de phosphore mesurée	17

Résumé

L'application d'une dynamique linéaire du premier ordre servant à la prévision de l'eutrophisation des lacs est étudiée en fonction de la charge en phosphore. Une mauvaise compréhension du terme de la sédimentation et l'utilisation de l'hypothèse du régime permanent ont gêné les prévisions par le passé.

Un modèle de la dynamique du phosphore total d'un lac est établi. Ce modèle montre que les lacs réagissent comme un système forcé aux variations de la concentration en phosphore du débit entrant. Bien que la concentration en phosphore d'un lac corresponde à celle du débit entrant, il est montré qu'il importe de cerner les caractéristiques de la vidange et de la sédimentation afin de bien modéliser la dynamique.

Abstract

The application of first-order linear dynamics to predict eutrophication in lakes is reviewed within the framework of the phosphorus loading concept. Lack of understanding of the sedimentation term and use of the steady-state assumption have impeded predictions in the past.

A model of the dynamics of total phosphorus in lakes is derived which shows that lakes respond as a forced system to changes in inflow phosphorus concentration. Although the concentration of phosphorus in a lake is shown to scale with the inflow concentration, the time dependence of flushing and sedimentation is important to successful modelling.

Perspective de gestion

Pendant les mois d'été, un grand nombre de lacs canadiens sont envahis par des algues qui nuisent à la qualité de l'eau et limitent les utilisations potentielles du lac. Les algues prolifèrent grâce à des concentrations élevées de phosphore qui proviennent souvent d'effluents d'eau d'égout municipaux. Il est indispensable d'avoir une certaine compréhension du comportement du phosphore dans les lacs pour pouvoir évaluer les effets éventuels d'une amélioration du traitement des eaux d'égout.

Le présent rapport établit la théorie de la dynamique du phosphore pour des lacs dans lesquels le phosphore est éliminé par vidange et par sédimentation. Il examine ensuite la notion de charge en phosphore. Enfin, il démontre que, du fait de l'utilisation de modèles statiques et d'une mauvaise compréhension du processus de sédimentation, il n'a pas été possible de prédire correctement la concentration de phosphore dans un système lacustre.

Dynamique du phosphore dans les systèmes lacustres

Bernard C. Kenney

INTRODUCTION

Dans plusieurs rapports désormais classiques, Vollenweider (1968, 1975, 1976) a présenté des méthodes permettant de prévoir l'eutrophisation d'un lac à partir du principe de la charge en phosphore. Ce principe est basé sur une observation empirique, à savoir que la production de chlorophylle augmente lorsque l'apport de phosphore (ou la charge) dans le lac augmente. Le principe de la charge en phosphore a été quantifié sous forme de nomogrammes, appelés diagrammes de charge en phosphore, qui ont été utilisés pour prédire les changements de niveau trophique des lacs consécutifs à des variations de la charge. Ce principe porte le nom général de principe de la charge en éléments nutritifs et il s'applique à tout autre élément nutritif ou élément fertilisant.

Le présent rapport examine le principe de la charge en phosphore tel qu'il est appliqué dans des modèles d'équilibre entrée-sortie. Il considère ensuite certains problèmes théoriques et pratiques liés à plusieurs modèles du phosphore. Enfin, il explore la dynamique du phosphore total dans les lacs en faisant appel à une théorie linéaire du premier ordre avec des coefficients variables en fonction du temps.

MODÈLES ENTRÉE-SORTIE

Savyer (1947) observa que, lorsque la concentration de phosphore dans un lac dépasse 10 à 20 mg/m^3, les algues ont tendance à proliférer. La limite inférieure mentionnée par Savyer a été utilisée par Vollenweider (1975; 1976) comme critère d'eutrophisation. Pour prédire l'état trophique d'un lac, il suffit alors de prédire quand la concentration de phosphore dans le lac, P_L, dépasse 10 mg/m^3, à partir de valeurs estimées de l'apport de phosphore, ou de la charge, L, dans le lac. La charge en phosphore a été définie comme étant la masse de phosphore total qui entre dans un lac par unité de temps, divisée par la superficie du lac. Le résultat requis peut être exprimé mathématiquement sous la forme d'une relation entre P_L et L (avec d'autres variables encore non spécifiées). La relation peut être exprimée en termes d'une fonction inconnue, f, de la façon suivante:

$$f(P_L, L, , , ,) = 0. \qquad (1)$$

La méthode empirique habituellement utilisée pour résoudre des problèmes de ce type consiste à mesurer P_L et L dans un certain nombre de cas et à déterminer la fonction inconnue, f. Cela revient en fait à effectuer un ajustement et la courbe obtenue (la fonction inconnue f) est souvent considérée comme étant universelle. Une fois f connue, on peut déterminer (ou «prédire») P_L à partir de valeurs estimées de L pour d'autres lacs. À l'inverse, on peut calculer une charge critique pour un lac donné en posant P_L = 10 mg/m^3 dans l'équation (1). L'exactitude de la prédiction dépend avant tout de la validité de l'hypothèse relative à la similarité des lacs.

En ce qui concerne les applications techniques, la méthode empirique donne de bons résultats lorsque les données utilisées pour déterminer la fonction inconnue sont choisies judicieusement de façon à tenir compte de la gamme complète de situations dans lesquelles la courbe obtenue peut être utilisée. Dans le contexte de l'eutrophisation des lacs, il convient d'utiliser des données provenant d'une grande variété de lacs pour déterminer f. On suppose aussi implicitement que d'autres facteurs, tels que les différences géologiques et géochimiques entre les bassins lacustres, ne sont pas importants.

Pour inclure des paramètres importants tels que la vitesse de vidange d'un lac, Vollenweider (1975) proposa d'établir des modèles de la charge en phosphore plus complexes qui fassent intervenir le principe de conservation de la masse. Il obtint ainsi plusieurs modèles entrée-sortie. Ces modèles jouant un rôle important dans l'étude du principe de la charge en phosphore, il faut commencer par montrer comment ils ont été obtenus.

Deux modèles entrée-sortie seront considérés. Le premier s'applique à un lac bien mélangé comportant un seul affluent et un seul émissaire. Le phosphore est éliminé du lac uniquement par l'émissaire. Le second modèle est identique au premier, mais avec l'ajout d'un second mode d'élimination du phosphore, par sédimentation. Ce dernier modèle est équivalent au modèle selon lequel le phosphore n'est pas conservé dans la colonne d'eau, présenté par Vollenweider (1975, p.58).

Modèle de lac bien mélangé à une seule échelle de temps

Soit un «lac modèle» bien mélangé comportant une seule entrée et une seule sortie d'eau. Soit Q le débit volume d'eau dans le lac. On suppose que le niveau du lac est constant, avec une profondeur moyenne z. Le lac a une superficie A et la concentration de phosphore total dans le lac est égale à P_L. La concentration de phosphore dans les eaux affluentes est égale à P_i et la concentration de phosphore dans les eaux effluentes est égale à P_L (car on suppose que le lac est bien mélangé). Les variables fondamentales habituelles sont donc P_i, P_L, Q, A, z, et t, où t est le temps.

Dans ses modèles entrée-sortie, Vollenweider (1975) a considéré la charge en phosphore, L, comme une grandeur fondamentale. Cependant, en réalité, la charge en phosphore est une grandeur, ou un paramètre, dérivée. Lorsque tout le phosphore est introduit dans le lac avec les eaux affluentes, $L = P_i Q/A$. Les variables fondamentales ci-dessus sont utilisées ici pour simplifier l'explication des modèles. Pour faciliter la comparaison avec Vollenweider (1975), certaines équations sont aussi exprimées en fonction de la charge en phosphore.

Il s'agit donc de déterminer P_L à un instant quelconque, t, après l'introduction continue de phosphore à l'entrée d'eau, P_i, en commençant soudainement au temps t = 0. On peut poser l'hypothèse, sans nuire à la généralisation, que la concentration initiale du lac était nulle au temps t = 0. Si l'on voulait examiner le problème d'un point de vue expérimental, la première tâche consisterait à effectuer une analyse dimensionnelle des variables indépendantes (Taylor, 1974). Les dimensions pertinentes dans ce problème sont la masse M, la longueur L et le temps T. On utilisera la convention de Taylor pour donner donner les dimensions des variables fondamentales. [ ] se lit «les dimensions de». Le signe = se lit «sont».

$$[P_i] = ML^{-3}$$
$$[P_L] = ML^{-3}$$
$$[Q] = L^3T^{-1}$$
$$[A] = L^2$$
$$[z] = L$$
$$[t] = T$$

Dans ce problème simple, on peut trouver deux groupes sans dimensions, soit par inspection, soit en utilisant le théorème de Buchingham II (Taylor, 1974). L'analyse dimensionnelle conduit au résultat suivant:

$$\frac{P_L}{P_i} = \text{Func}\left(\frac{Qt}{Az}\right). \qquad (2)$$

L'équation (2) signifie que la grandeur sans dimension P_L/P_i est une fonction inconnue de la variable sans dimension Qt/Az. La relation fonctionnelle réelle dépend des équations qui gouvernent le processus. Avec la méthode empirique, la fonction inconnue serait obtenue par l'expérience. On pourrait, par exemple, établir une corrélation entre P_L/P_i et Qt/Az.

Dans ce cas simple, il n'est pas nécessaire de mener une série d'expériences pour déterminer la fonction inconnue. On peut écrire directement l'équation principale relative au lac modèle en utilisant le principe de conservation de la masse, soit:

$$\frac{dP_L}{dt} = \frac{P_i Q}{Az} - \frac{P_L Q}{Az}. \qquad (3)$$

Dans cette équation différentielle, dP_L/dt est le taux de variation de la concentration de phosphore dans le lac. Ce taux est égal à la différence entre le taux d'augmentation de la concentration dans le lac, dû à l'entrée d'eau, et le taux de diminution de la concentration, dû à la sortie d'eau. Comme on a supposé que les eaux affluentes constituent la seule source de phosphore, on peut écrire l'équation (3) en fonction de la charge en phosphore, soit:

$$\frac{dP_L}{dt} = \frac{L}{z} - \frac{P_L Q}{Az}. \qquad (4)$$

L'équation (4) est équivalente à l'équation 2.5 de Vollenweider (1975).

L'équation (3) est une équation différentielle ordinaire de premier ordre qu'on peut résoudre facilement en séparant les variables. La solution, en prenant comme conditions initiales $P_L = 0$ à $t = 0$, est la suivante:

$$\frac{P_L}{P_i} = 1 - \exp(-Qt/Az). \qquad (5)$$

On vient ainsi d'établir la fonction inconnue de l'équation (2) pour ce «lac modèle» simple. Si l'équation principale était différente, en raison d'hypothèses initiales différentes (au sujet du mélange, par exemple), cette fonction inconnue serait aussi différente. Cette solution de l'équation (3) est appelée la réponse du lac à une fonction échelon en termes de concentration de phosphore. Elle décrit l'augmentation de la concentration de phosphore dans le lac en fonction du temps après une addition soudaine de phosphore au point d'entrée de l'eau. On peut utiliser une technique similaire avec une diminution soudaine, ou même une variation continue, de la concentration de phosphore dans les eaux affluentes.

La réponse à la fonction échelon est illustrée sur la figure 1 en fonction de l'échelle de temps $\tau_w = Az/Q$ du système. Par définition, lorsque $t = \tau_w$, $P_L = -1/e = 63\ \%$ de sa valeur finale. L'échelle de temps, Az/Q, dans ce problème simple, est la même que celle qu'on utilise souvent dans la réalité. Elle est appelée temps de séjour de l'eau ou temps de renouvellement de l'eau.

La figure 1 présente deux caractéristiques du modèle qui seront importantes dans la suite de l'étude. Premièrement, en régime permanent (c'est-à-dire lorsque $t \to \infty$), la concentration dans le lac est égale à la concentration dans l'apport d'eau (soit, $P_L = P_i$). Deuxièmement, on peut faire une estimation raisonnable de la valeur finale en régime permanent (par exemple,

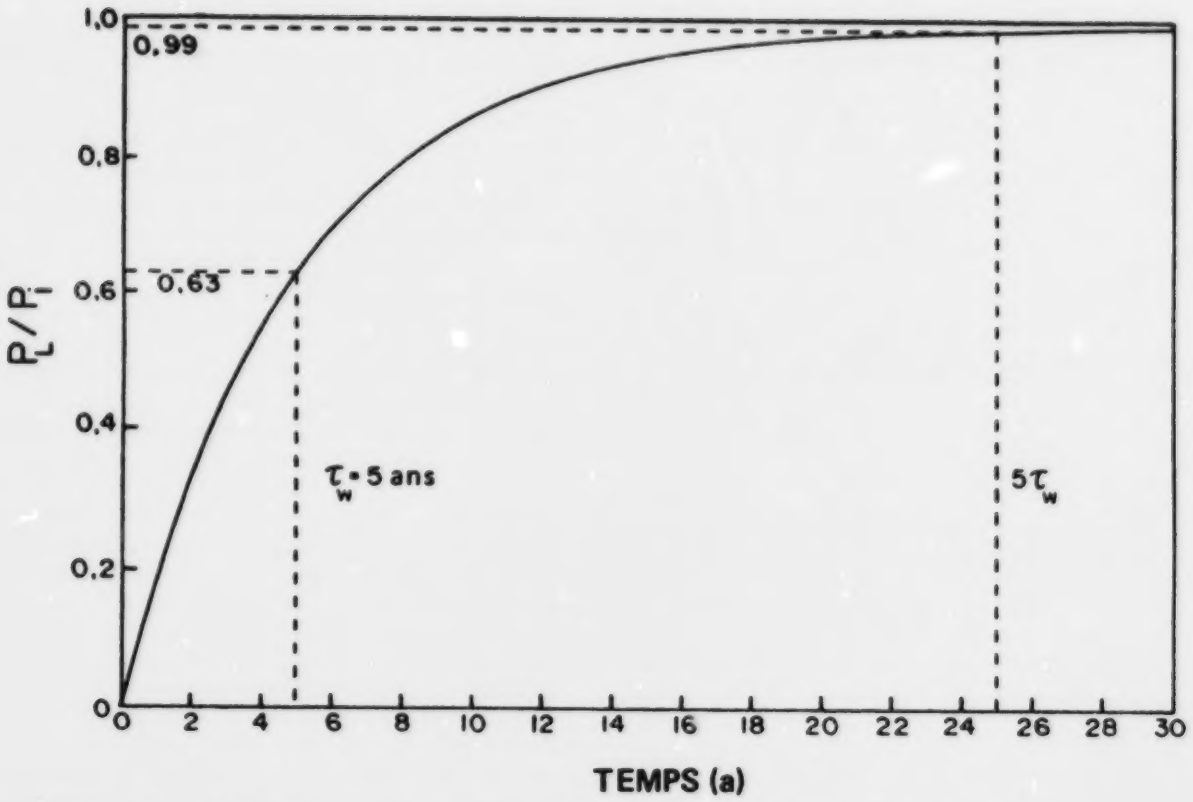

Figure 1. Réponse en fonction du temps du modèle entrée-sortie à une échelle de temps: temps de renouvellement de l'eau.

99 %) au bout d'un temps $t > 5\ \tau_w$. Pour toutes les valeurs de $t < 5\ \tau_w$, $P_L < p_i$.

L'analyse qui conduit à l'équation (5) est exacte. Si l'on construisait un modèle physique du «lac modèle» dans un laboratoire, qui satisfasse toutes les hypothèses, l'équation (5) pourrait aussi être déterminée expérimentalement. L'exactitude de l'équation (5) appliquée à un lac réel dépend uniquement de la validité des hypothèses du modèle. La validité des hypothèses en ce qui concerne les lacs réels sera examinée plus loin.

Modèle à deux échelles de temps

Le modèle précédent peut être étendu au cas où l'élément introduit dans le lac (le phosphore) peut être éliminé du lac par un autre moyen que l'émissaire, par exemple par sédimentation. On suppose que la vitesse d'élimination par sédimentation est proportionnelle à la concentration du phosphore dans le lac, P_L, et l'on désigne la constante de proportionnalité par la lettre σ. Les variables fondamentales sont maintenant P_i, P_L, Q, A, z, t, et σ, où $[\sigma] = \underline{T}^{-1}$. L'analyse

dimensionnelle de ce nouveau modèle conduit au résultat suivant:

$$\frac{P_L}{P_i} = \text{Func}\left(\frac{Qt}{Az}, \sigma t\right). \qquad (6)$$

Dans ce cas, la grandeur sans dimension est une fonction inconnue de deux variables sans dimensions indépendantes. S'il fallait déterminer expérimentalement la fonction inconnue, la tâche serait considérable, surtout si la fonction inconnue n'est pas linéaire.

Quoi qu'il en soit, dans cet exemple, on peut écrire directement l'équation principale, comme auparavant, en ajoutant un autre terme qui tienne compte de la sédimentation:

$$\frac{dP_L}{dt} = \underset{\text{(source)}}{\frac{P_i Q}{Az}} - \underset{\text{(puits)}}{\frac{Q\,P_L}{Az}} - \underset{\text{(puits)}}{\sigma P_L}. \qquad (7)$$

L'équation gouvernant le nouveau lac modèle comporte donc un terme source et deux termes puits. Elle peut aussi être résolue par séparation des variables. La solution, en prenant encore comme condition initiale $P_L = 0$ à $t = 0$, est la suivante:

$$\frac{P_L}{P_i} = \frac{1}{1+\frac{Az\sigma}{Q}}\left[1 - \exp(-Qt/Az)\exp(-\sigma t)\right]. \qquad (8)$$

Là encore, on a déterminé la fonction inconnue, fonction $(Qt/Az, \sigma t)$. On observe que, dans ce problème, il y a deux échelles de temps: le temps de renouvellement de l'eau, $\tau_w = Az/Q$, comme dans le premier modèle, et une seconde échelle de temps, $\tau_s = 1/\sigma$, qui sera appelée le temps de sédimentation.

La forme de la solution est illustrée sur la figure 2. En régime permanent,

$$\frac{P_L}{P_i} = \frac{1}{1+\frac{Az\sigma}{Q}} = \frac{1}{1+\frac{\tau_w}{\tau_s}} \cdot \quad (t \to \infty) \qquad (9)$$

La concentration dans le lac en régime permanent n'est plus égale à la concentration dans les eaux affluentes, elle est toujours inférieure ($P_L < P_i$). La valeur réelle en régime permanent de P_L dépend non seulement du temps de sédimentation, mais aussi du temps de renouvellement de l'eau. Par conséquent, deux lacs complètement différents (un premier avec une vitesse de renouvellement et une vitesse de sédimentation élevées, un second avec une vitesse de renouvellement et une vitesse de sédimentation faibles) peuvent avoir la même concentration en régime permanent (figure 2). Cependant, il faut beaucoup plus de temps au second lac pour atteindre le régime permanent. En général, plus la vitesse de renouvellement est élevée (c'est-à-dire, plus τ_w est faible), pour une vitesse de sédimentation donnée, plus la valeur de P_L en régime permanent est proche de celle de P_i. À l'inverse, plus la vitesse de sédimentation est élevée (c'est-à-dire, plus τ_s est faible), pour une vitesse de renouvellement donnée, plus la valeur finale de P_L est faible.

Étant donné la forme de la solution de ce modèle, on peut aussi définir une constante de temps globale, τ_o, de la façon suivante:

$$\tau_o = \frac{\tau_w}{1+\frac{\tau_w}{\tau_s}}. \qquad (10)$$

La constante de temps globale d'un système est toujours inférieure au temps de renouvellement de l'eau, pour toutes les valeurs finies de la vitesse de sédimentation. Comme avec le premier

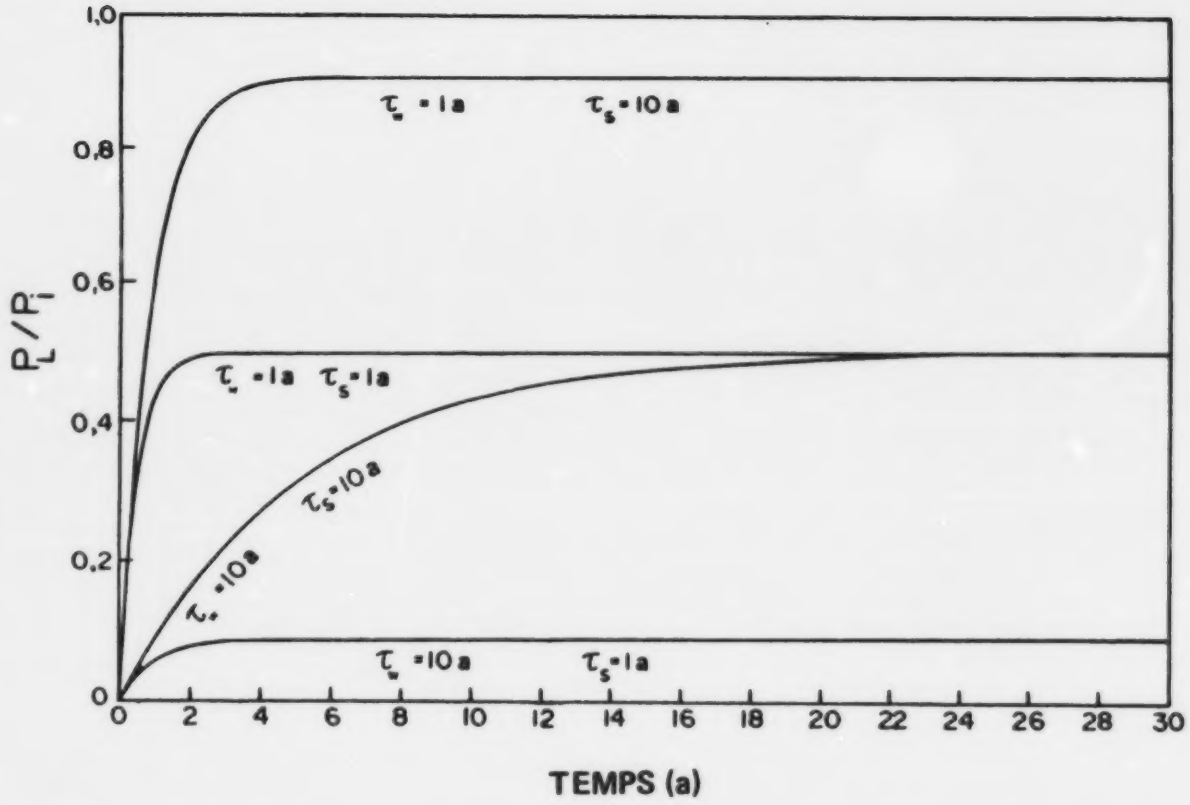

Figure 2. Réponse en fonction du temps du modèle entrée-sortie à deux échelles de temps: renouvellement de l'eau et sédimentation.

modèle, on atteint 99 % de la valeur en régime permanent en un temps $t = 5\ \tau_o$.

MODÈLES DE LA CHARGE EN PHOSPHORE

Modèle de la charge hydraulique

Le modèle de la charge hydraulique présenté dans Vollenweider (1976) était basé sur le modèle entrée-sortie à une source (entrée d'eau) et deux puits (émissaire et sédimentation) décrit dans la section précédente. Les résultats du modèle étaient présentés sous forme d'un graphique de la charge en phosphore en fonction de la charge hydraulique, la charge hydraulique étant définie comme la profondeur moyenne divisée par le temps de renouvellement de l'eau du lac. Toutefois, le modèle de la charge hydraulique comportait une erreur dans le traitement du terme relatif à la sédimentation. Dans la présente section, nous étudierons la nature et les conséquences de cette erreur.

Le modèle entrée-sortie requis était défini par l'équation (7), en fonction des variables fondamentales du problème.

L'équation (7) peut être réécrite en fonction de la charge en phosphore:

$$\frac{dP_L}{dt} = \frac{L}{z} - \frac{P_L}{\tau_w} - \sigma P_L. \qquad (11)$$

La solution de l'équation (11) est le résultat cherché, c'est-à-dire une relation entre L et P_L. Il n'est pas nécessaire d'intégrer l'équation (11) pour obtenir la solution car on avait posé l'hypothèse (Vollenweider, 1976) que tous les lacs étaient en régime permanent en ce qui concerne le phosphore. Par conséquent, en posant $dP_L/dt = 0$ dans l'équation (11), on obtient le modèle de la charge hydraulique cherché:

$$L = P_L \left(\frac{z}{\tau_w} + z\sigma\right). \qquad (12)$$

Lorsque z, τ_w et σ sont connus, l'équation (12) décrit la relation entre L et P_L (au moins avec les hypothèses initiales).

Il est difficile d'appliquer l'équation (12) aux lacs réels car le temps de sédimentation, σ^{-1}, est en général inconnu ou difficile à mesurer. Vollenweider (1975) précisait que σ ne pouvait pas être mesuré et qu'il fallait le déterminer à partir du modèle lui-même. Pour ce faire, l'équation (12) était réécrite sous la forme:

$$\sigma = \frac{1}{z}\left(\frac{L}{P_L} - \frac{z}{\tau_w}\right). \qquad (13)$$

σ était alors déterminé pour 21 lacs différents à partir de valeurs de P_L, L, z et τ_w. Bien que cette méthode permette de déterminer la constante de sédimentation pour différents lacs, l'équation (13) n'est pas une équation indépendante. Si l'on substitue l'équation (13) dans l'équation (12), on arrive à une identité:

$$L = P_L\left(\frac{z}{\tau_w} + z\sigma\right)$$

$$= P_L\left[\frac{z}{\tau_w} + \frac{z}{z}\left(\frac{L}{P_L} - \frac{z}{\tau_w}\right)\right] = L. \qquad (14)$$

Cette identité (14) signifie que l'équation (13) ne peut être utilisée comme relation fonctionnelle pour trouver la valeur de σ dans l'équation (12). Il convient donc d'établir une relation générale indépendante des équations (12) et (13) qui s'applique à tous les lacs.

Vollenweider (1976) a porté sur un graphique les valeurs estimées de σ pour 21 lacs en fonction de la profondeur moyenne, dans le but d'essayer d'obtenir une équation indépendante pour σ. Dans ce cas, la profondeur moyenne était un choix malheureux car la corrélation trouvée entre σ et z était une fausse auto-corrélation résultant du fait que l'on représentait un rapport en fonction de son propre dénominateur. Cette corrélation a été examinée par Kenney (1982) dans le cadre d'une analyse des formes de fausse auto-corrélation résultant de l'utilisation d'un terme commun. Le résultat de la corrélation était le suivant:

$$\sigma = \frac{10}{z}. \qquad (15)$$

Par conséquent, au lieu de substituer directement l'équation (13) dans l'équation (12), ce qui aurait conduit à l'identité (14), on a substitué la fausse relation définie par l'équation (15) dans l'équation (12) pour obtenir le modèle final de la charge hydraulique, soit:

$$L = P_L\left(\frac{z}{\tau_w} + 10\right). \qquad (16)$$

Après substitution du critère de Sawyer, on est arrivé à l'équation suivante pour la charge en phosphore critique, L_c, d'un lac:

$$L_c = 10 \frac{z}{\tau_w} + 100 \cdot (mg/m^2/a) \qquad (17)$$

Il est possible également de démontrer que le modèle de la charge hydraulique peut être obtenu directement à partir de la fausse corrélation et de l'équation (13):

$$\sigma = \frac{10}{z} = \frac{1}{z} \left(\frac{L}{P_L} - \frac{z}{\tau_w}\right). \qquad (18)$$

L'équation (18) montre que l'acceptation de la fausse corrélation revient à supposer que:

$$10 = \frac{L}{P_L} - \frac{z}{\tau_w}. \qquad (19)$$

Toutefois, l'équation (19) ne constitue pas une bonne approximation des données car $(L/P_L - z/\tau_w)$ varie de 3 à 60 (avec une moyenne de 15 et un écart type de 14). Néanmoins, l'équation (16) peut être obtenue directement à partir de l'équation (19), par simple réarrangement des termes.

Modèle perfectionné

Le modèle de la charge en phosphore qui sera considéré maintenant a aussi été établi par Vollenweider (1976). Ses paramètres incluent la profondeur moyenne et le temps de renouvellement de l'eau. Dans le présent rapport, il sera appelé le modèle perfectionné.

Le modèle perfectionné est obtenu en établissant une relation entre L et P_L. Soit:

$$L = P_L \frac{z}{\tau_w} (1 + \sqrt{\tau_w}). \qquad (20)$$

Là encore, le résultat final peut être exprimé sous la forme d'une charge en phosphore critique qui ne doit pas être dépassée lorsqu'on substitue le critère de Sawyer (1947), à savoir $P_L \leq 10$ mg/m^3.

Dans Vollenveider (1976), le modèle perfectionné résulte de l'application de l'hypothèse du régime permanent à l'équation (11). Cependant, il n'est pas nécessaire de faire appel à l'équation (11) pour obtenir le modèle perfectionné. Ce modèle peut être établi directement à partir de la régression entre τ_p/τ_w et τ_w, où τ_p est le temps de séjour du phosphore dans le lac (figure 3).

Plutôt que d'utiliser l'équation de régression exponentielle réelle pour les données de la figure 3, Vollenweider a fait appel à la représentation analytique suivante:

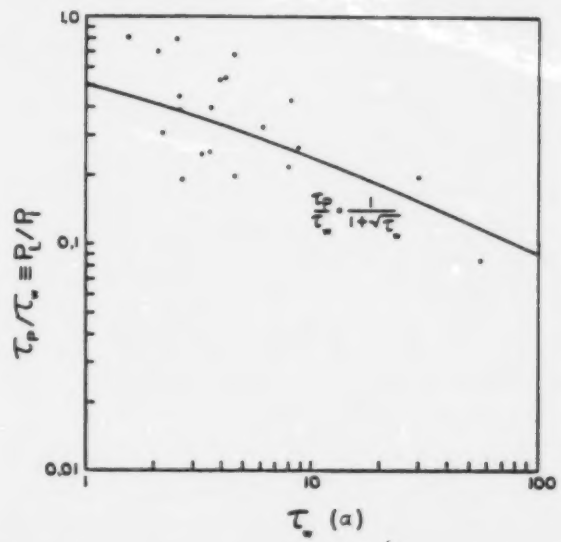

Figure 3. Temps de séjour relatif du phosphore en fonction du temps de séjour de l'eau (d'après Vollenweider, 1976).

$$\frac{\tau_p}{\tau_w} = \frac{1}{1 + \sqrt{\tau_w}}. \qquad (21)$$

L'équation (21) a été préférée à l'équation exponentielle car elle traduit mieux le comportement asymptotique prévu des lacs à vitesse de vidange élevée (lacs ayant des temps de renouvellement de l'eau courts). Bien que l'équation (21) représente presqu'aussi bien les 21 points de données de la figure 3 que l'équation exponentielle, il convient de noter que le succès de la régression (c'est-à-dire les coefficients de corrélation élevés obtenus) dépend fortement des deux points correspondant aux longs temps de renouvellement de l'eau. La validité de l'équation (21) sera examinée plus loin, mais, pour commencer, il faut montrer comment le modèle perfectionné est établi directement à partir de l'équation 21.

Le temps de séjour du phosphore, τ_p, est défini par Vollenweider (1976), par analogie avec le temps de séjour de l'eau, comme «le temps hypothétique nécessaire pour que la concentration de phosphore dans un lac atteigne sa valeur actuelle à partir d'une concentration nulle». Vollenweider (1976, p. 62, équation 6) a montré que le rapport entre le temps de séjour du phosphore et le temps de séjour de l'eau, τ_p/τ_w, était égal au rapport entre la concentration moyenne de phosphore dans le lac, P_L, et la concentration moyenne dans les eaux affluentes, P_i. Par conséquent, l'équation (21) peut être réécrite sous la forme:

$$\frac{\tau_p}{\tau_w} = \frac{P_L}{P_i} = \frac{1}{1 + \sqrt{\tau_w}}. \qquad (22)$$

L'hypothèse que la charge en phosphore totale de chaque lac était contenue dans les eaux affluentes était implicite dans Vollenveider (1976). Avec cette hypothèse, l'équation (22) peut s'écrire:

$$\frac{P_L}{L}\frac{Q}{A} = \frac{1}{1 + \sqrt{\tau_w}}. \qquad (23)$$

en réarrangeant les termes de l'équation (23):

$$L = P_L \frac{Q}{A} \frac{z}{z} (1 + \sqrt{\tau_w}), \qquad (24)$$

et, puisque $\tau_w = Az/Q$, on arrive à l'équation du modèle perfectionné. Par conséquent, le modèle perfectionné est le résultat direct d'une analyse de régression empirique.

Il est instructif, cependant, d'examiner plus attentivement l'équation (11) pour voir comment elle est liée au modèle perfectionné. Si on compare l'équation (22) et l'équation (9), on constate que le modèle perfectionné peut être obtenu à partir du modèle entrée-sortie à deux échelles de temps si on suppose que $\sigma = 1/\sqrt{\tau_w}$. Cependant, avec cette hypothèse, on obtient un modèle entrée-sortie très différent. L'équation différentielle gouvernant le phosphore, pour le lac modèle perfectionné, n'est plus l'équation (7), ni l'équation (11), mais l'équation suivante:

$$\frac{dP_L}{dt} = \underbrace{\frac{L}{z}}_{\text{(source)}} - \underbrace{\frac{P_L}{\tau_w}}_{\text{(puits)}} - \underbrace{\frac{P_L}{\sqrt{\tau_w}}}_{\text{(puits)}}. \qquad (25)$$

Il convient de noter que, bien que l'équation (25) contienne un terme source et deux termes puits, les deux termes puits ne sont pas indépendants. Plutôt qu'un modèle basé sur deux échelles de temps indépendantes (τ_w,

σ^{-1}), l'équation différentielle gouvernant le phosphore dans le modèle perfectionné dépend uniquement du temps de renouvellement de l'eau, τ_w. En réécrivant l'équation (25):

$$\frac{dP_L}{dt} = \frac{L}{z} - P_L \left(\frac{1 + \sqrt{\tau_w}}{\tau_w}\right) \qquad (26)$$

et substituant l'équation (21) on obtient l'équation simplifiée suivante:

$$\frac{dP_L}{dt} = \frac{L}{z} - \frac{P_L}{\tau_p}. \qquad (27)$$

La solution de l'équation (27) (par séparation des variables) montre que le temps de séjour du phosphore, τ_p, constitue l'échelle de temps efficace du modèle perfectionné. Il y a une différence importante entre l'échelle de temps efficace du modèle perfectionné décrite ici et l'échelle de temps globale (équation 10) examinée précédemment. L'échelle de temps globale comporte deux variables indépendantes qui décrivent deux processus indépendants, la vidange et la sédimentation; l'échelle de temps efficace décrit seulement un processus, la vidange.

Lorsqu'on a établi les modèles entrée-sortie, on a supposé que la vidange et la sédimentation étaient des processus indépendants. Cette hypothèse semble raisonnable pour la plupart des lacs. La vidange est régie par des paramètres hydrologiques tels que les précipitations, la taille du bassin versant, la taille du lac et la morphométrie. D'un point de vue physique, la sédimentation est un processus aléatoire non permanent qui dépend largement de la turbulence dans le lac et, partant, du vent. D'un point de vue biologique, la sédimentation dépend de la vitesse de conversion biologique du phosphore dissous en phosphore particulaire par le biais de la croissance d'algues. En plus d'être un processus aléatoire non permanent, la croissance d'algues est hautement non linéaire et directement associée à de nombreux processus physiques à l'oeuvre dans les lacs. La sédimentation sera probablement différente dans les lacs peu profonds et dans les lacs suffisamment profonds pour se stratifier car le flux de sédiments à travers la thermocline est alors piégé, au moins jusqu'au renversement automnal. Il faut s'attendre à un couplage important entre les vitesses de vidange et de sédimentation seulement lorsque l'écoulement hydraulique dans le lac domine la production d'une turbulence (c'est-à-dire dans les lacs qui sont seulement de légers élargissements de cours d'eau à grand débit). De tels lacs existent, mais ils sont rares. Par conséquent, pour la plupart des lacs, il semble raisonnable de supposer que la vidange et la sédimentation sont des processus indépendants.

On peut aussi considérer que le modèle perfectionné représente un lac qui est le siège d'un type spécial de sédimentation, c'est-à-dire un lac dans lequel le temps de sédimentation est proportionnel à la racine carrée du temps de renouvellement de l'eau. Le tableau 1 compare des valeurs typiques de l'échelle de temps efficace obtenues à partir du modèle perfectionné avec les valeurs du temps de renouvellement de l'eau et de cette échelle spéciale du temps de sédimentation. D'après le tableau 1, dans les lacs où le temps de renouvellement de l'eau est long, c'est le phénomène de sédimentation qui domine. Dans les lacs où le temps de renouvellement de l'eau est court, les effets de la vidange et de la sédimentation ont la même importance. Par conséquent, pour un lac dont l'eau

se renouvelle très lentement, comme le lac Tahoe (τ_w = 700 ans), le temps efficace du modèle perfectionné en ce qui concerne le phosphore est beaucoup plus court (25 ans) que τ_w. Or, on a vu que le temps nécessaire pour approcher du régime permanent était égal à 5 τ. Par conséquent, le lac Tahoe atteindrait le régime permanent, en ce qui concerne le phosphore, au bout de 150 ans, selon le modèle perfectionné, contre 3500 ans en l'absence de sédimentation. Étant donné la différence, il est très important de savoir quelle échelle de temps est correcte. Dans la prochaine section, on examinera la validité du modèle perfectionné et quelques conséquences importantes de l'hypothèse relative au régime permanent.

Tableau 1. Quelques valeurs typiques de l'échelle de temps efficace, τ_p, du temps de renouvellement de l'eau, τ_w et de l'échelle de temps de sédimentation spéciale, τ_s, obtenues à partir du modèle perfectionné

τ_p (années)	τ_w (années)	τ_s (années)
0.5	1	1.0
0.83	2	1.4
1.25	4	2.0
2.4	10	3.16
9.1	100	10.0
25.5	700	26.5
30.7	1000	31.6

HYPOTHÈSE DU RÉGIME PERMANENT

Tous les modèles de la charge en phosphore présentés dans Vollenweider (1976) sont fondés sur l'hypothèse que les lacs sont en régime permanent en ce qui concerne la concentration de phosphore. Malheureusement, ignorer le terme variable en fonction du temps dans les équations différentielles peut entraîner une erreur non négligeable. Cette section évalue l'incidence de l'hypothèse du régime permanent sur le modèle perfectionné.

Il a été montré précédemment que le modèle perfectionné est en fait basé sur la régression entre P_L/P_i et τ_w (figure 3). Dans ce cas, l'hypothèse du régime permanent est essentielle. Les figures 1 et 2 montrent le comportement de P_L/P_i er fonction du temps pour deux modèles entrée-sortie avant que le régime permanent soit atteint. Avec le modèle entrée-sortie à une seule échelle de temps (figure 1), la concentration de phosphore dans le lac en régime permanent était toujours égale à la concentration de phosphore dans les eaux affluentes. À toutes fins pratiques, le régime permanent est atteint au bout d'un temps égal à 5 τ_w. De plus, P_L peut être très inférieure à P_i, comme le montre la figure 1.

Par ailleurs, la figure 2 montre que, même en régime permanent, P_L est toujours inférieure à P_i avec un modèle entrée-sortie à deux échelles de temps (vidange et sédimentation). À toutes fins pratiques, avant d'atteindre le régime permanent, P_L peut donc être bien inférieure à P_i. Le problème est, de combien inférieure? De plus, pourquoi est-elle inférieure? P_L est-elle inférieure à P_i en raison d'une forte sédimentation dans un lac particulier ou est-ce simplement que le lac est loin d'avoir atteint le régime permanent? La validité du modèle perfectionné dépend des réponses à ces questions.

Si tous les lacs utilisés dans l'analyse de régression (figure 3) étaient véritablement en régime permanent, en termes de concentration de

phosphore, $\sigma = 1/\sqrt{\tau_w}$ pourrait être une estimation raisonnable de l'effet de la sédimentation du phosphore (ou de tout autre processus d'élimination du phosphore non traité explicitement). Cependant, si P_L/P_i est inférieur à sa valeur en régime permanent pour l'un quelconque des lacs de la figure 3, l'effet de la différence est simplement absorbé dans le terme relatif à la sédimentation. En d'autres termes, si P_L/P_i est faible parce que le lac est loin du régime permanent, le modèle perfectionné conclut automatiquement que ce lac est le siège d'une forte sédimentation. En effet, dans le modèle, la vitesse de sédimentation doit être élevée (τ_s court) pour que le rapport P_L/P_i soit faible en régime permanent (figure 2). On peut observer une telle tendance dans le tableau 1. Les lacs possédant de longs temps de renouvellement de l'eau (il y a de grandes chances que ces lacs n'aient pas atteint le régime permanent) subissent avant tout les effets de la sédimentation, selon le modèle perfectionné. Mais, le modèle perfectionné est-il correct? Pour évaluer correctement l'incidence de l'hypothèse du régime permanent sur le modèle perfectionné, il faut revenir à l'origine du modèle (figure 3). Comme on l'a vu précédemment, le succès de la régression dépend dans une large mesure des deux points de la figure 3 correspondant à un long τ_w (soit τ_w = 30 ans et τ_w = 56 ans). Si on élimine ces deux points, le coefficient de corrélation, qui avait un seuil de signification de 1 % (-0,674), devient un coefficient comportant un seuil de non signification de 5 % (-0,412). En d'autres termes, lorsque ces deux points sont éliminés, il n'y a pas de corrélation notable entre P_L/P_i et τ_w (au seuil de 5 %) et le fondement du modèle perfectionné disparaît. La validité du modèle perfectionné dépend donc fortement des données relatives à deux lacs qui ont tous les deux de longs temps de renouvellement de l'eau. Par ailleurs, il y a très peu de chance que ces deux lacs soient en équilibre car il leur faut respectivement 150 ans et 280 ans pour atteindre le régime permanent (en ne tenant pas compte de la sédimentation). Le poids élevé attribué à la sédimentation dans le cas des lacs possédant de longs temps de renouvellement de l'eau résulte peut-être directement de l'utilisation de deux lacs éloignés de l'équilibre dans l'établissement du modèle perfectionné. Tant que les effets de la sédimentation n'auront pas été évalués avec précision, les prédictions faites à partir du modèle perfectionné devront être considérées comme douteuses.

Un autre problème vient du fait que le modèle perfectionné peut être vérifié avec des données relatives à d'autres lacs qui sont aussi éloignés de l'équilibre. Étant donné que les apports anthropogènes importants de phosphore dans les lacs sont relativement récents, la plupart des lacs qui ont de longs temps de renouvellement sont inclus dans cette catégorie. À l'heure actuelle, le modèle perfectionné peut sembler correct. Cependant, une surestimation de la sédimentation, comme le fait le modèle, et une gestion du lac correspondante (c'est-à-dire une augmentation de la charge en phosphore) pourraient avoir des effets désastreux pour les lacs ayant des τ_w élevés lorsque le régime permanent sera finalement atteint.

Larsen et Mercier (1976) ont présenté une analyse similaire à celle de Vollenweider (1976) en utilisant des données relatives à des séries de lacs différentes. Ils ont utilisé le même modèle entrée-sortie fondamental et la même hypothèse de régime permanent, mais ils ont fait intervenir le coefficient

de rétention, $R = 1 - P_L/P_i$. Le résultat de Larsen et Mercier,

$$R = \frac{1}{1 + \tau_w^{-\frac{1}{2}}}, \qquad (28)$$

est équivalent à celui de Vollenweider (1976, équation 22), comme le montre une simple substitution de R dans l'équation (28). La figure 4 est un graphique de P_L/P_i en fonction de τ_w tracé à partir des données relatives aux 20 lacs utilisés par Larsen et Mercier pour établir l'équation (28). Ces lacs s'ajustent bien à l'équation (22) et ils pourraient être utilisés pour prouver la validité du modèle perfectionné. Malheureusement, la même critique (à savoir l'application de l'hypothèse du régime permanent à tous les lacs) vaut pour l'analyse de Larsen et Mercier. En outre, Larsen et Mercier ont choisi les 20 lacs (parmi 34 lacs pour lesquels ils disposaient de données) qui donnaient la meilleure relation empirique entre R et les caractéristiques du lac. Le choix subjectif de lacs qui donnent le plus grand coefficient de régression est discutable. Si l'on trace un graphique à partir des lacs de Larsen et Mercier (1976) et de Vollenweider (1976) (figure 4), on observe une plus grande dispersion. Cette dispersion peut être attribuée à des différences dans la sédimentation ou dans le degré de non permanence des lacs, ou encore à d'autres facteurs dont le modèle ne tient pas compte. Il est certain que les trois lacs de la figure 4 qui ont les temps de renouvellement de l'eau les plus longs ont aussi les plus petites valeurs de P_L/P_i, mais cela est-il dû à un taux de sédimentation élevé ou simplement au fait que ces lacs sont loin du régime permanent?

Dans les équations (22) et (28), et les figures 3 et 4, on suppose implicitement ou explicitement que P_L/P_i dépend seulement de τ_w. Cependant, on a montré, dans l'établissement du modèle fondamental sur lequel sont basées les analyses de Vollenweider et de Larsen et Mercier, que P_L/P_i est une fonction de τ_w, σ et t (voir équation 6). Cette contradiction peut être résolue si σ ou t sont constants, ou si P_L/P_i est constant avec σ ou t variables, ou encore si σ ou t sont des fonctions de τ_w, ou enfin si plusieurs de ces conditions sont combinées. La conclusion du modèle perfectionné de Vollenweider est que P_L/P_i est constant avec t variable (hypothèse du régime permanent) et que σ est fonction de τ_w. Il ne semble pas y avoir de preuve mathématique ou physique convaincante qui vienne à l'appui d'une telle conclusion.

MODÈLE D'EDMONDSON ET LEHMAN

Edmondson et Lehman (1981) (EL dans la suite du texte) ont présenté un modèle d'eutrophisation qu'ils ont vérifié à l'aide de données recueillies dans le lac Washington. Ils sont partis de l'équation du modèle de lac bien mélangé à une seule échelle de temps (équation 3 dans le présent rapport, équation 10 dans EL). Leur modèle est intéressant car il fait intervenir une nouvelle façon de traiter le facteur relatif à la sédimentation du phosphore. En général, on se base sur une équation heuristique dans laquelle la sédimentation du phosphore est proportionnelle à la concentration de phosphore dans le lac; plus la concentration de phosphore est élevée, plus la vitesse de sédimentation est élevée. EL estiment qu'il est plus juste de supposer que la vitesse de sédimentation est proportionnelle à l'apport de phosphore, I (où $I = P_i Q$ en utilisant les symboles du présent rapport). On montrera que l'hypothèse de EL est incorrecte.

Pour obtenir le terme relatif à la sédimentation du phosphore, EL ont simplement réduit l'apport de phosphore en utilisant la constante de

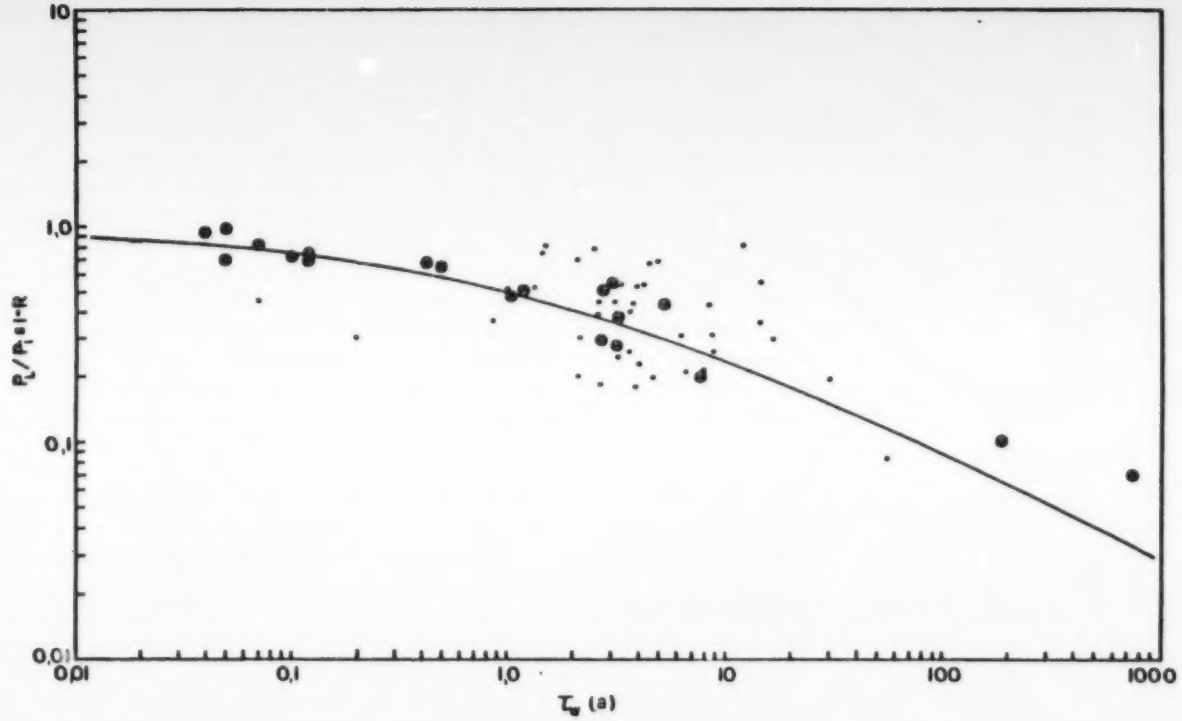

Figure 4. Rapport des concentrations de phosphore, P_L/P_i, non dimensionnel, en fonction du temps de séjour de l'eau, τ_w, pour 54 lacs étudiés par Larsen et Mercier (1976) et Vollenweider (1976). Les 20 lacs utilisés par Larsen et Mercier sont encerclés.

proportionnalité $\underline{f}$, égale à la pente de la droite de régression entre la sédimentation du phosphore, P_{sed}, et I. Le terme P_{sed} a lui-même été calculé à partir des autres termes du bilan du phosphore par différence. Ainsi, EL ont posé que la vitesse de sédimentation du phosphore était égale à l'apport annuel en phosphore moins l'évacuation annuelle de phosphore, P_o, moins la variation annuelle de la masse de phosphore dans le lac, dP, mesurée le 1er janvier de chaque année. Soit:

$$\underline{f} = \text{fonction } (I, P_o, dP). \qquad (29)$$

On montrera plus loin que l'équation du modèle de EL peut s'écrire:

$$dP = \text{fonction } (I, P_o, \underline{f}) \qquad (30)$$

ou encore:

$$P_o = \text{fonction } (I, dP, \underline{f}). \qquad (31)$$

Étant donné qu'aucune information nouvelle n'a été ajoutée entre les équations (29) et (31), le principe essentiel du modèle de EL est contenu dans $\underline{f}$ et dans la droite de régression illustrée sur la figure 5. Les figures 6 et 7 qui sont présentées pour vérifier le modèle de EL ne sont que des reformulations de la figure 5. Les écarts par rapport à la droite correspondant à un accord de 100 % sur les figures 6 et 7 ne font que représenter les écarts par

rapport à la droite de régression de la figure 5. Si tous les points de la figure 5 s'étaient alignés sur la droite de régression, les «résultats» du modèle de EL sur les figures 6 et 7 auraient montré un accord parfait. En fait, le modèle de EL est tout simplement une tautologie.

Pour montrer encore mieux la tautologie, il convient d'examiner la figure 5 de façon approfondie. Cette figure représente la variation de l'apport annuel de phosphore dans les sédiments, $P_{séd}$, en fonction de la charge en phosphore, I. La droite de régression des moindres carrés pour les données de la figure 5 s'écrit:

$$< P_{séd} > = \underline{f}\, I + \text{constante.} \qquad (32)$$

Si l'apport annuel de phosphore dans le lac est connu pour une année quelconque, par exemple pour l'année J, la valeur estimée par les moindres carrés du taux annuel de sédimentation du phosphore pour l'année J, $< P_{séd} >$, peut alors être obtenue à partir de l'équation (32).

Le modèle de EL prend la forme analogique discrète suivante (EL, équation 12):

$$P_{j+1} = I_j(1 - \underline{f}) + P_j(1 - Q_j/V) \qquad (33)$$

où P_j est la teneur en phosphore du lac le 1er janvier de chaque année. Cependant, EL ont comparé les prédictions obtenues à partir du modèle de l'évacuation annuelle avec les valeurs mesurées (figure 6) de telle sorte que les termes de l'équation du modèle doivent être réarrangés ainsi:

$$P_jQ_j/V = I_j(1 - \underline{f}) - (P_{j+1} - P_j) \qquad (34)$$

$$= \text{ÉVACUATION ANNUELLE PRÉDITE}$$

L'équation (34) est l'équation du modèle de EL qui permet de prédire l'évacuation de phosphore. On a substitué des valeurs de I_j, P_j et P_{j+1} dans le modèle de EL pour obtenir des valeurs du taux annuel d'évacuation du phosphore pour l'année J. La valeur de $\underline{f}$ était constante et égale à la pente de 0.49 trouvée sur la figure 5. Ces valeurs prédites du taux d'évacuation ont été comparées avec les valeurs mesurées sur la figure 6. Une méthode similaire a été adoptée avec les valeurs de la concentration de P dans le lac de la figure 7.

L'équation (34) peut être développée sous la forme:

$$P_jQ_j/V = I_j - \underline{f}I_j - (P_{j+1} - P_j) + P_{oj} - P_{oj}$$

$$= I_j - P_{oj} - dP_j - \underline{f}I_j + P_{oj}. \qquad (35)$$

Mais,

$$P_{sédj} = (I - P_o - dP)_j \qquad (36)$$

car $P_{séd}$ a été calculé par différence à partir du bilan. De plus, d'après l'équation (32), $\underline{f}I$ est la valeur estimée par les moindres carrés de $P_{séd}$ moins une constante. Soit:

$$\underline{f}I_j = < P_{séd} >_j - \text{constante.} \qquad (37)$$

Substituons les équations (36) et (37) dans l'équation (35). Nous obtenons le taux annuel d'évacuation du phosphore prédit par le modèle d'EL:

$$P_jQ_j/V = P_{séd\ j} - < P_{séd} >_j$$

$$+ \text{constante} + P_{oj}. \qquad (38)$$

Pour les points de données qui tombent sur la droite de régression, $P_{séd}$ est identique à $< P_{séd} >$. Pour tous les autres points, $P_{séd}$ est approximativement égal à $< P_{séd} >$, à l'exception des points à l'écart de la droite de

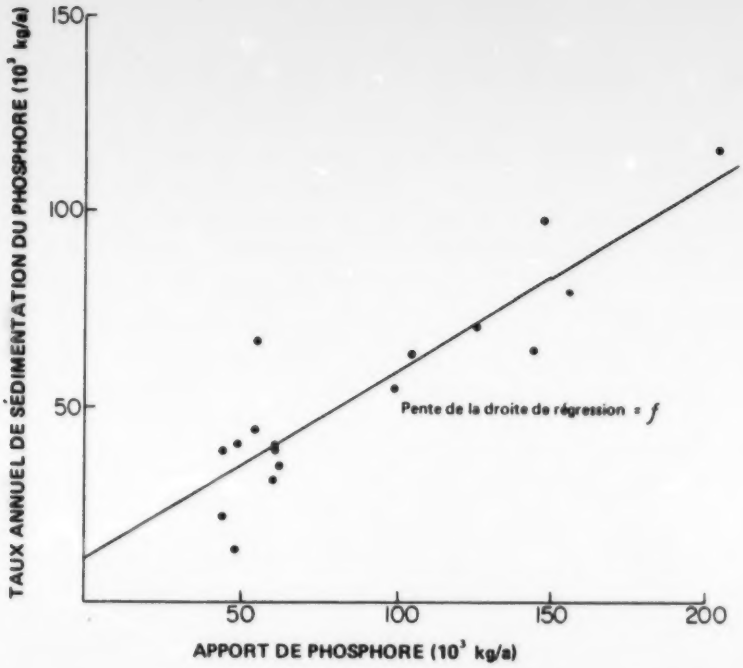

Figure 5. Taux annuel de sédimentation du phosphore calculé à partir du bilan de phosphore du lac Washington en fonction de l'apport de phosphore (d'après Edmondson et Lehman, 1981).

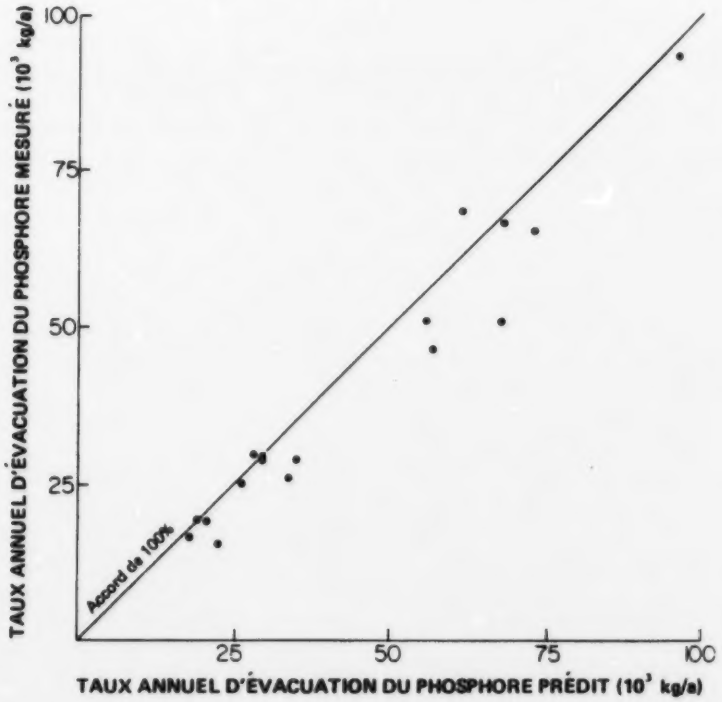

Figure 6. Taux d'évacuation du phosphore prédit à l'aide du modèle d'Edmondson et Lehman en fonction du taux d'évacuation mesuré (d'après Edmondson et Lehman, 1981).

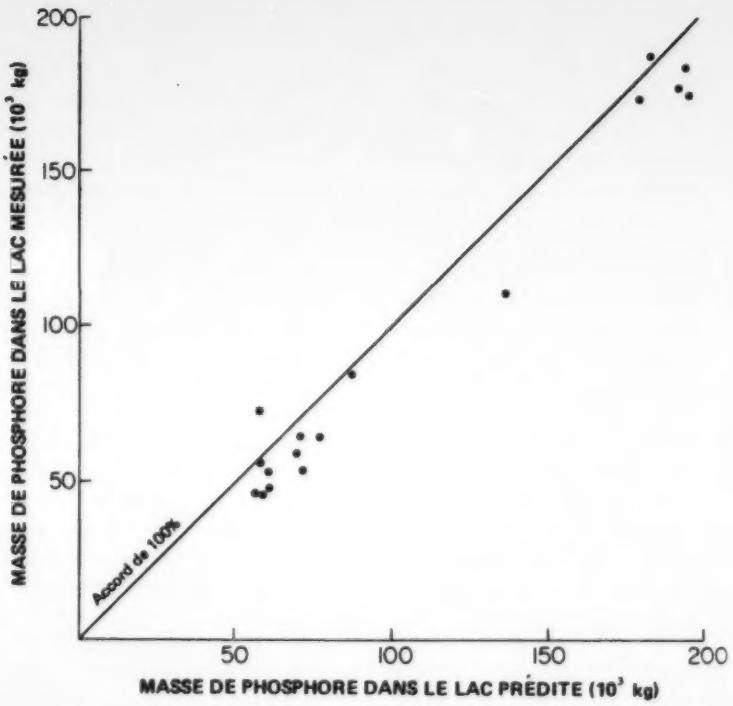

Figure 7. Masse de phosphore dans le lac prédite par le modèle d'Edmondson et Lehman en fonction de la masse de phosphore mesurée (d'après Edmondson et Lehman, 1981).

régression des moindres carrés. Par conséquent, l'équation (38) se réduit à:

$$P_j Q_j / V = P_{oj} + \text{constante} \pm \text{dispersion.} \qquad (39)$$

On est donc revenu au point de départ. Le taux de phosphore évacué prédit est égal au taux de phosphore évacué mesuré plus une constante, plus ou moins une certaine dispersion. La constante, qui intervient du fait que la droite de régression de la figure 5 ne passe pas par l'origine, explique pourquoi la plupart des valeurs prédites se trouvent à droite de la droite théorique correspondant à un accord de 100 % entre les prédictions et les observations sur la figure 6. Comme on l'a expliqué précédemment, la dispersion observée sur la figure 6 est simplement une réflexion de la dispersion observée sur la figure 5.

Les mêmes arguments s'appliquent à la figure 7 sur laquelle les valeurs prédites de la concentration de phosphore dans le lac se situent généralement à droite de la droite correspondant à un accord de 100 % avec les concentrations observées.

DYNAMIQUE DU PHOSPHORE DANS UN LAC

La présente section, examine plus en détail la nature des modèles entrée-sortie établis précédemment ainsi que plusieurs facteurs influant sur l'appli-

cation de ces modèles à des lacs réels. Il suppose que le phosphore est effectivement l'élément qu'il convient de modéliser et que le critère de Sawyer est correct. Par conséquent, la prédiction de l'eutrophisation peut se réduire à la prédiction du moment où $P_L > 10$ mg/m^3, comme précédemment. Étant donné qu'il faut surtout déterminer les effets à long terme de la charge en phosphore dans un lac, c'est la valeur de P_L en régime permanent qui sera prédite.

La relation entre la charge en phosphore et la concentration de phosphore dans le lac en régime permanent a été donnée par l'équation (12) pour le modèle entrée-sortie à deux échelles, la vidange et la sédimentation. La charge critique en phosphore P_{L_c} dans un lac donné peut être déterminée en substituant le critère de Sawyer dans l'équation (12). Soit:

$$L_c = 10z \left(\frac{1}{\tau_w} + \sigma\right) \text{ (mg/m}^2\text{/an)}. \quad (40)$$

Dans la limite des hypothèses posées, l'équation (40) est l'équation «prédictive» de l'eutrophisation du lac. Lorsque z, τ_w et σ sont connus, la charge critique en phosphore peut être calculée directement à partir de l'équation (40). Bien entendu, σ n'est généralement pas connu et c'est ce qui conduit aux problèmes examinés dans les chapitres précédents.

Constante de sédimentation, σ

Il existe plusieurs méthodes permettant de déterminer indirectement σ pour un lac donné suivant le type de charge en phosphore associé à ce lac. Toutes les méthodes dépendent essentiellement de la validité du modèle entrée-sortie à deux échelles de temps. Toute erreur expérimentale dans les mesures (de même que toute erreur associée à d'autres sources ou puits non inclus explicitement dans le modèle) est tout simplement absorbée dans la constante de sédimentation.

Méthode du régime permanent

La première méthode a été examinée brièvement lorsqu'on a envisagé le modèle de la charge hydraulique. Elle peut être appliquée à un lac donné si l'on sait que ce lac a atteint le régime permanent en ce qui concerne le phosphore. Supposer qu'un lac a atteint le régime permanent sans données corroborantes ne sert à rien. On peut vérifier l'état du lac en mesurant L et P_L pendant un certain temps. Si L et P_L restent constants pendant une période de temps égale ou supérieure à τ_o, on peut supposer sans risques que le lac est en régime permanent. Si l'on dispose aussi de données pour z (et τ_w), on peut déterminer σ à partir de l'équation (13).

Si on cherche seulement à déterminer la charge critique en phosphore pour un lac donné en régime permanent, il n'est pas nécessaire de calculer la constante de sédimentation, σ. Pour un lac donné en régime permanent, le rapport L/P_L est constant. Par conséquent, il suffit de mesurer une seule fois L et P_L pour obtenir la constante, dans les limites des hypothèses requises, bien entendu. La charge critique en phosphore peut alors être déterminée à partir de l'équation:

$$\frac{L_c}{10} = \text{CONSTANTE} = \left(\frac{L}{P_L}\right)_{\substack{\text{régime} \\ \text{permanent}}} \quad (41)$$

L'équation (41) s'applique à chaque lac séparément, mais la valeur de la constante varie considérablement d'un lac à un autre.

Méthode de la réponse à une fonction échelon

On peut appliquer la deuxième méthode de détermination de la constante

de sédimentation s'il y a eu une variation soudaine de la charge en phosphore (augmentation ou diminution) et si les concentrations de phosphore dans le lac, P_L, sont mesurées immédiatement après la variation. Pour déterminer la constante de temps globale du lac, τ_o, on ajuste une courbe exponentielle aux points représentant P_L en fonction du temps. Une fois que l'on connaît τ_o, on peut calculer σ à partir de l'équation (10). Là encore, la charge critique en phosphore pour le lac donné peut être calculée à partir de l'équation (40).

Méthode de la réponse forcée

Dans beaucoup de lacs, la charge en phosphore n'est ni constante, ni sujette à des variations brusques; elle varie plutôt de façon continue. Dans ce cas, on doit examiner la réponse forcée du lac pour déterminer σ.

Pour simplifier l'étude des systèmes forcés, on présente d'abord une analyse de la réponse forcée du modèle entrée-sortie à une seule échelle de temps. L'équation linéaire de premier ordre gouvernant le modèle entrée-sortie à une échelle de temps (équation 3) peut être réécrite de la façon suivante:

$$\tau_w \frac{dP_L}{dt} + P_L = P_i\ (t) \qquad (42)$$

où la concentration de phosphore dans les eaux affluentes, P_i, est maintenant la fonction de contrainte qui varie en fonction du temps pour le système. La fonction de contrainte la plus simple est donnée par l'équation:

$$P_i(t) = P_o + P_1 \sin \omega t \qquad (43)$$

où P_1 est l'amplitude d'une oscillation harmonique simple autour d'une certaine valeur constante de la concentration de phosphore, P_o.

Les équations (42) et (43) se résolvent facilement en termes de l'amplitude relative des oscillations à la sortie et du déphasage entre l'entrée et la sortie, mais, pour abréger, la résolution de ces équations sera omise. Après décroissance des transitoires initiaux, la réponse du système forcé (P_L', la partie oscillante de P_L dans cet exemple) a la même fréquence que la fonction de contrainte (c'est-à-dire ω). L'amplitude des oscillations à la sortie et le déphasage entre l'entrée et la sortie sont déterminés par les caractéristiques du système. Dans l'équation (42), il y a un seul paramètre qui caractérise le système au complet, le temps de renouvellement de l'eau, τ_w. L'amplitude relative de la réponse, G (c'est-à-dire l'ampleur de l'oscillation à la sortie par rapport aux oscillations à l'entrée, ou oscillations de contrainte) est donnée par l'équation:

$$G = \frac{P_L'}{P_1} = \frac{1}{(1 + \omega^2 \tau_w^2)^{1/2}}. \qquad (44)$$

Le retard de phase, ϕ, entre les oscillations à la sortie et les oscillations à l'entrée est donné par l'équation:

$$\phi = \tan^{-1} \omega\tau_w. \qquad (45)$$

La réponse forcée du système est totalement décrite par G et ϕ en termes d'une fonction de la fréquence non dimensionnelle $\omega\tau_w$. Pour des oscillations de contrainte de basse fréquence (c'est-à-dire $\omega\tau_w$ petit), les oscillations à la sortie (P_L') suivent essentiellement les oscillations à l'entrée (P_1) avec une faible atténuation ou un faible déphasage. Par contre, les oscillations de contrainte de haute fréquence ($\omega\tau_w$ >> 1) sont très fortement atténuées. La concentration de phosphore dans le lac

accuse alors un retard d'environ 90° par rapport aux oscillations à l'entrée.

Soit par exemple un lac hypothétique ayant un temps de renouvellement de l'eau d'une année, soumis à une fonction de contrainte selon un cycle annuel. Les équations (44) et (45) donnent une réponse relative de seulement 0.16 avec un déphasage de 81°. Cela signifie que des oscillations de la concentration de phosphore à l'entrée de 100 mg/m^3 se traduiraient par une oscillation de la concentration de phosphore dans le lac de 16 mg/m^3. Par conséquent, des oscillations annuelles de la concentration de phosphore à l'entrée constituent des oscillations de haute fréquence pour un lac dont le temps de renouvellement de l'eau est égal à une année. Des oscillations plus rapides de la concentration de phosphore à l'entrée (par exemple, mensuelles ou quotidiennes) sont plus atténuées dans ce lac hypothétique et elles doivent avoir une très grande amplitude pour que l'on puisse détecter des oscillations à la sortie.

Si l'on excepte le fait que les caractéristiques de la réponse sont déterminées par deux paramètres (τ_w et σ), la réponse forcée du modèle entrée-sortie à deux échelles de temps est similaire à la réponse décrite ci-dessus. L'équation principale (équation 7) peut être réécrite pour mettre en évidence le rôle de la fonction de contrainte sous la forme:

$$\tau_w \frac{dP_L}{dt} + (1 + \sigma\tau_w)P_L = P_o + P_1 \sin \omega t \qquad (46)$$

L'amplitude relative obtenue à partir de l'équation (46) est égale à:

$$G = \frac{1}{(1 + (\frac{\omega\tau_w}{1 + \sigma\tau_w})^2)^{1/2}}. \qquad (47)$$

Le déphasage est maintenant donné par l'équation:

$$\phi = \tan^{-1}(\frac{\omega\tau_w}{1 + \sigma\tau_w}). \qquad (48)$$

Lorsque le lac est soumis à une oscillation harmonique simple, c'est-à-dire une oscillation sinusoïdale de fréquence unique, on peut utiliser soit l'équation (47), soit l'équation (48) pour déterminer la constante de sédimentation dans la plage des fréquences non dimensionnelles, $0.1 \leq \omega\tau_w/(1 + \sigma\tau_w) \leq 10$. En dehors de cette plage de fréquences, la précision avec laquelle σ est déterminé est très mauvaise. Pour déterminer σ à partir de l'une ou l'autre des équations, il faut mesurer le temps de renouvellement de l'eau ainsi que les variations en fonction du temps des concentrations de phosphore dans l'apport d'eau et dans le lac sur une période suffisamment longue pour pouvoir calculer ω à partir des mesures. Lorsqu'on utilise l'équation (47), la réponse relative, G, est calculée à partir des variations en fonction du temps de l'apport et de l'écoulement de telle sorte que σ reste la seule inconnue dans l'équation (47). De même, le déphasage, ϕ, est mesuré directement à partir des variations en fonction du temps, ce qui permet d'utiliser l'équation (48) pour déterminer σ. Pour obtenir une précision raisonnable, il faut disposer de données recueillies pendant au moins un cycle complet de période $T = 2\pi/\omega$.

Lorsque les oscillations de contrainte ont une large bande de fréquences (c'est-à-dire lorsqu'elles sont composées d'un grand nombre de fréquences différentes), le déphasage entre les oscillations à l'entrée et les oscillations à la sortie peut encore être déterminé par une analyse interspectrale. Toutefois, les techniques spectrales requièrent des données recueillies pendant un grand nombre de

cycles complets et il est possible que l'on ne dispose pas d'un nombre suffisant de données pour effectuer une analyse spectrale si la fonction de contrainte est dominée par des basses fréquences. On insiste sur le fait que toutes les méthodes de détermination de σ décrites ici requièrent des données sur les variations en fonction du temps des concentrations de phosphore dans les eaux affluentes et dans le lac sur plusieurs τ_w. Par conséquent, dans un futur proche, la détermination de σ par analyse spectrale ne sera probablement appliquée qu'aux lacs pour lesquels τ_w est faible.

Coefficients variables en fonction du temps

Comme on l'a mentionné précédemment, le succès des modèles entrée-sortie en ce qui concerne la prédiction de l'eutrophisation dépend uniquement de la validité des hypothèses sur lesquelles les modèles sont basés. Autrement dit, le traitement mathématique est exact. On va maintenant examiner la validité d'une hypothèse qui influe considérablement sur l'application de ces modèles.

Tout au long du présent rapport, on a supposé que les coefficients des équations différentielles de premier ordre (soit τ_w, σ) étaient constants. Toutefois, la majorité des lacs réels sont sujets à de grandes variations de l'écoulement (Q) au cours d'une année car, dans un grand nombre de lacs tempérés, l'écoulement maximal se produit lors du ruissellement superficiel de printemps. Les variations du niveau du lac (z) et du volume (Az) peuvent aussi être importantes, en particulier avec les lacs utilisés pour la production d'électricité. Ces variables influent directement sur le temps de renouvellement de l'eau ($\tau_w = Az/Q$) de telle sorte que τ_w varie aussi en fonction du temps.

Les facteurs qui influent sur la constante de sédimentation, σ, ne sont pas très bien compris. On sait que la sédimentation est un processus aléatoire non permanent qui peut être positif ou négatif suivant la période considérée. Tous les lacs sont sujets à une certaine sédimentation négative dans la colonne d'eau et ce phénomène est très courant dans les lacs peu profonds. La sédimentation physique dépendant principalement du niveau de turbulence dans le lac, on peut s'attendre à ce que les grandes variations saisonnières de σ reflètent les différences entre la turbulence sous le manteau de glace en hiver et la turbulence en eaux libres dans les lacs tempérés.

Pour être plus réalistes, les modèles doivent donc faire intervenir des coefficients τ_w et σ qui varient en fonction du temps. Par exemple, l'équation

$$\tau_w(t) \frac{dP_L(t)}{dt} + \{1 + \sigma(t)\tau_w(t)\} P_L(t) = P_i(t) \qquad (49)$$

remplace maintenant l'équation (46), (t) exprimant explicitement la variabilité en fonction du temps. Avant de pouvoir résoudre l'équation (49), il convient de connaître la variation temporelle de τ_w et de σ (ou de les prédire indépendamment), soit sous la forme de données historiques pour les variations aléatoires, soit sous la forme de fonctions analytiques pour les variations périodiques. La fonction de contrainte, $P_i(t)$ doit aussi être introduite dans le modèle. Cette fonction de contrainte peut prendre la forme de valeurs historiques de l'apport mesuré de phosphore dans un lac pour une prévision à postériori de la réponse du lac. Des variations anticipées de l'apport de phosphore peuvent aussi être introduites

dans le modèle, soit sous forme de données historiques, soit sous forme de fonctions analytiques dans le but de prévoir les variations futures dans le lac.

Dans de nombreux lacs, les variations temporelles des coefficients peuvent être plus importantes que les variations de la concentration de phosphore dans les eaux affluentes (fonction de contrainte). Dans les lacs compliqués, la fonction de contrainte et les coefficients variables en fonction du temps peuvent même être couplés, par exemple par l'écoulement dans le lac, Q. En règle générale, on peut avancer qu'un ruissellement printanier important tend à égaliser la concentration de phosphore dans le lac et la concentration dans l'apport d'eau printanier en réduisant considérablement la valeur instantanée de τ_w. Par contre, la présence d'un manteau de glace a tendance à entraîner un accroissement de la sédimentation.

Une approximation quasi-stationnaire peut permettre de résoudre analytiquement l'équation (49) si les variations des coefficients sont faibles par rapport à la fréquence de la fonction de contrainte. Cependant, étant donné que les variations saisonnières de τ_w et σ sont souvent prédominantes, l'approximation quasi-stationnaire s'appliquera rarement. En général, les équations telles que l'équation (49) requièrent une résolution numérique.

Plusieurs exemples de l'application de la théorie décrite dans ces pages à des lacs réels sont présentés dans Kenney (1990a, 1990b).

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier K. Patalas, F.M. Boyce, D.W. Schindler, C. Gray, M. Waiser, et R.A. Vollenweider qui ont bien voulu examiner les premières versions du manuscrit et me faire part de leurs commentaires. Je désire aussi exprimer ma reconnaissance à J. Mollison qui a préparé les figures.

RÉFÉRENCES

Edmondson, W.T., et J.T. Lehman. 1981. The effect of changes in the nutrient income on the condition of Lake Washington. Limnol, Oceanogr., 26: 1-29.

Kenney, B.C. 1982. Beware of spurious self-correlations! Water Resour. Res., 18: 1041-1048.

Kenney, B.C. 1990a. Dynamique du phosphore dans une chaîne de lacs: les lacs Fishing. Rapp. n° 44 de l'INRH, Étude n° 176, série scientifique, Institut national de recherche en hydrologie, Centre national de recherche en hydrologie, Direction générale des eaux intérieures, Environnement Canada, Saskatoon (Sask.).

Kenney, B.C. 1990b. Lake dynamics and the effects of flooding on total phosphorus. Can. J. Fish. Aquat. Sci. 47: 480-485.

Larsen, D.P., et H.T. Mercier. 1976. Phosphorus retention capacity of lakes. J. Fish. Res. Board Can., 33: 1742-1750.

Sawyer, C.N. 1947. Fertilization of lakes by agricultural and urban drainage. J. N. Engl. Water Works Assoc., 61: 109-127.

Taylor, E.S. 1974. Dimensional analysis for engineers, Londres, Oxford University Press.

Vollenweider, R.A. 1968. Scientific fundamentals of the eutrophication of lakes and flowing water, with particular reference to phosphorus and nitrogen as factors in eutrophication. OECD Tech. Rep. DAS/CS1/68.27. 159 p.

Vollenweider, R.A. 1975. Input-output models with special reference to the phosphorus loading concept in

limnology. Schweiz. Z. Hydrol., 37: 53-84.

Vollenweider, R.A. 1976. Advances in defining critical loading levels for phosphorus in lake eutrophication, Mem. Ist. Ital. Idrobiol., 33: 53-83.